

Численное моделирование процессов промерзания и оттаивания грунтов: обзор современного состояния и новейших достижений

Идрисов И.Х.

Генеральный директор ООО «Геотим», к.т.н., г. Пенза, Россия

Актуальность темы статьи обусловлена расширением хозяйственного освоения Арктической зоны Российской Федерации и территорий распространения многолетнемерзлых пород (ММП), а также деградацией многолетней мерзлоты в условиях глобального потепления, что создает серьезные риски для устойчивости инфраструктуры – трубопроводов, фундаментов, гидротехнических объектов, автомобильных и железных дорог. Точный прогноз поведения системы «сооружение – основание» в криолитозоне невозможен без применения современных численных методов, учитывающих сложные взаимосвязанные теплофизические, гидродинамические и механические процессы.

В работе представлен обзор современного состояния численного моделирования процессов промерзания и оттаивания грунтов. Систематизированы основные программные комплексы, применяемые для расчета оснований на мерзлых грунтах. Отмечены их новейшие версии и роль отечественных разработок в проектной практике РФ.

Проанализированы определяющие уравнения для мерзлых грунтов – феноменологические модели ползучести с переменной температурой, упругопластические и упруговязкопластические модели критического состояния, гипопластические модели, дробно-производные (фрактальные) модели на основе исчисления Римана – Лиувилля. Обсуждаются области применимости, преимущества и ограничения каждого класса моделей.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Отмечены перспективные направления дальнейших исследований в рассматриваемой области, включая разработку отечественного программного обеспечения и стандартизацию параметров современных моделей в национальных нормах проектирования.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием компьютерных технологий большинство теоретических исследований было сосредоточено на механизме взаимодействия незамерзшей воды, тепла, деформаций и напряжений с применением метода конечных разностей (МКР, FDM) и метода конечных элементов (МКЭ, FEM) [1–16]. За последнее десятилетие к этим классическим методам добавились:

- метод дискретных элементов (МДЭ, DEM);
- метод материальных точек (MPM – Material Point Method);
- бессеточные методы, такие как метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH – Smoothed Particle Hydrodynamics) и методы перидинамики (peridynamics);
- методы машинного обучения с использованием физически информированных нейронных сетей (PINN – Physics-Informed Neural Networks).

Эти новые подходы позволили существенно расширить круг решаемых задач [17–19].

Поскольку точное аналитическое решение уравнений теплопроводности получить не удастся (в особенности при сложных граничных условиях и учете фазовых переходов), для решения задач стали использовать численные методы на основе МКР [9, 20–25], а позднее – на основе МКЭ [26–29]. В современных работах принято говорить о связанных многополевых моделях, таких как термогидромеханические (ТНМ – thermo-hydro-mechanical) и термогидромеханикохимические (ТНМС – thermo-hydro-mechanical-chemical), которые обеспечивают совместный расчет тепловых, гидравлических, механических и химических полей [30–32].

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

При использовании МКР и МКЭ нестационарный непрерывный тепловой процесс разбивается во времени на ряд интервалов, в течение которых тепловые процессы принимаются постоянными и пропорциональными разностям температур на границах соответствующего массива грунта. Точность решения зависит в этом случае от того, насколько малыми будут эти интервалы времени, а также от качества пространственной дискретизации.

В решениях на основе МКР и МКЭ может учитываться неоднородность состава и свойств грунтов, поскольку в уравнении нестационарной теплопроводности свойства материалов и изменения температуры во времени определены в любой точке рассматриваемого грунтового массива. Эти методы дают возможность дискретизировать рассматриваемую область, поскольку это позволяет в каждый промежуток времени разбить суммарный тепловой поток на ряд составляющих в пределах этой области.

Новейший обзор [31] показывает резкий рост публикаций по связанным моделям мерзлых грунтов после 2020 года: если в 2003–2010 гг. ежегодно публиковалось не более 30–50 работ, то в 2022–2024 гг. их число превысило 250 в год. Это связано с актуальностью проблем деградации многолетней мерзлоты в условиях глобального потепления и с расширением инфраструктурного строительства в Арктике.

ОСНОВНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ОСНОВАНИЙ НА ПРОМЕРЗАЮЩИХ И МЕРЗЛЫХ ГРУНТАХ

TEMP/W и **TEMP3D** (www.geoslope.com) – модули программного комплекса GeoStudio, являющиеся мощными специализированными инструментами для моделирования теплопереноса и фазовых переходов в пористых средах методом конечных элементов. Они разработаны канадской компанией GEO-SLOPE International (позже вошедшей в американскую корпорацию Bentley Systems). Эти программные продукты позволяют как решать простые задачи теплопроводности, так и анализировать сложное поведение грунтов при их циклическом промерзании-оттаивании. При моделировании фазовых переходов в **TEMP/W** и **TEMP3D** учитывается скрытое тепло, связанное с превращением воды в лед и льда в воду. Скорость, с которой скрытое тепло поглощается или выделяется, регулируется функцией содержания

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

незамерзшей воды. Выше температуры фазового перехода вся вода находится в талом состоянии. Когда температура падает ниже точки фазового перехода, часть воды, остающаяся незамерзшей, уменьшается. Полная гибкость в определении функции содержания незамерзшей воды позволяет анализировать широкий спектр грунтовых условий. Модуль TEMP/W может быть связан с программными модулями SEEP/W или AIR/W для учета конвективного теплопереноса, обусловленного движением воды или воздуха. Аналогично, TEMP3D может быть связан с SEEP3D для анализа трехмерного конвективного теплопереноса, свободной конвекции воды из-за термически индуцированных изменений плотности и теплового потока пара. В версии GeoStudio 2024 добавлена поддержка вычислений с использованием графических процессоров (GPU) и улучшен модуль учета снежного покрова с зависящей от его плотности теплопроводностью.

Termoground – модуль, созданный в начале 2000-х годов в составе программного комплекса **FEM models**, разработанного Институтом «Геореконструкция» и Петербургским государственным университетом путей сообщения (www.georeconstruction.com) [26, 27]. Он позволяет анализировать процессы промерзания, морозного пучения и оттаивания на основе результатов расчета температурных и влажностных полей. Теплофизическая часть программы впервые позволила учитывать комплекс факторов – нестационарность, физическую и теплофизическую нелинейность работы грунтов при промерзании и оттаивании в пространственной постановке. Строгое решение этих задач предусматривает учет фазовых превращений воды в интервале отрицательных температур, а также наличие в зоне промерзания влаги, мигрирующей к границе данной зоны. Именно эта влага при близости к фронту промерзания подземных вод вносит основной вклад в деформацию морозного пучения, а также деформацию последующего оттаивания.

ABAQUS (www.thesis.com.ru, www.simuleon.com) и **ANSYS** (www.ansys.com) – универсальные конечноэлементные программные пакеты, разработанные одноименными американскими компаниями (однако компания ABAQUS в 2005 году была поглощена французской корпорацией Dassault Systèmes). В них нет прямой реализации модели теплопереноса для промерзающих грунтов. Однако моделирование задач теплопроводности можно выполнить с помощью таких пользовательских

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

подпрограмм ABAQUS, как UMATHT и UMAT, работающих совместно. Это позволяет вводить в программу любую новую модель поведения мерзлого грунта, разработанную в процессе исследований [33]. После 2020 года появились открытые библиотеки пользовательских подпрограмм для ABAQUS, реализующие связанные термогидромеханические (ТНМ) модели на основе модели поведения грунта «Кэм-клэй» (Cam-Clay) для мерзлых грунтов [30] и упруговязкопластические модели критического состояния [17].

Frost 3D (www.simmakers.com, www.frost3d.ru) – программный комплекс российской компании НТЦ «Симмэйкерс», первую версию которого (Frost 3D Universal) разработали к 2013 году и с 2014 года начали активно внедрять в проектную практику крупных нефтегазовых корпораций РФ. В 2018 году в Томске на базе АО «ТомскНИПИнефть» (ныне ООО «РН-ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДОБЫЧА») был открыт первый сертифицированный учебный центр Frost 3D Universal.

В этом программном комплексе реализуется возможность теплотехнических расчетов с учетом замерзания и оттаивания грунтов с расчетом конвективного теплопереноса, миграции влаги к фронту промерзания и с оценкой работы охлаждающих устройств. Условия теплообмена с окружающей средой, определяемые температурой воздуха и коэффициентом теплоотдачи, задаются на верхней границе области моделирования. При наличии источников теплового излучения, таких как газовые факелы, дополнительно указываются температура источника теплового излучения и коэффициент излучения поверхности земли. Влияние снежного покрова на тепловой режим поверхности грунта учитывается путем определения изменений во времени толщины снежного покрова и его теплопроводности. Температура грунта задается на нижней границе области моделирования в соответствии с термометрическими данными. Боковая поверхность области моделирования, как правило, задается с нулевым тепловым потоком. При этом боковые границы должны располагаться достаточно далеко от интересующей инженера-проектировщика области, чтобы они не влияли на расчет тепловых процессов.

Область моделирования может включать неоднородные слои грунта с разными теплофизическими и связанными с ними свойствами – теплоемкостью, теплопроводностью, плотностью и влажностью. В этом случае необходимо построить трехмерную область компьютерного

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

моделирования искусственного промерзания грунта, которая учитывает фактическое распределение его слоев с различными теплофизическими и влияющими на них свойствами. Такое распределение предлагается строить на основе данных инженерно-геологических скважин. При сложной структуре грунтов реконструкция области моделирования выполняется с использованием геостатистических методов [34].

Frost 3D позволяет выполнять расчеты тепловых режимов многолетнемерзлых грунтов с учетом изменений их температуры при тепловом влиянии трубопроводов, фундаментов зданий, добывающих скважин, гидротехнических и других сооружений. По данным разработчика, в новейших версиях этого программного комплекса (2023–2025 гг.) реализованы: поддержка моделей с десятками миллионов узлов (демонстрировались расчеты с 58 млн узлов для километровых участков газопроводов); GPU-параллелизация; сертификация по российским нормам.

PLAXIS 2D/3D (PLAXIS) – программный продукт, разработанный в компании PLAXIS bv, ныне вошедшей в Bentley Systems. Этот единый с технической и коммерческой точек зрения продукт (PLAXIS) поставляется в двух разных конфигурациях, которые в инженерной и издательской практике принято называть двумя разными программными комплексами или модулями – PLAXIS 2D и PLAXIS 3D. Он широко используется в последние годы в РФ при проектировании фундаментов как на обычных, так и на мерзлых грунтах. С 2016 года в PLAXIS реализована модель Frozen and Unfrozen Soil (FUS), разработанная Норвежским университетом естественных и технических наук (NTNU) совместно с компанией PLAXIS bv [35, 36] и представляющая собой расширение модели Barcelona Basic Model для мерзлого состояния грунтов. FUS является полностью связанной THM-моделью и учитывает три фазы (такие как минеральный скелет, лед, незамерзшая вода), морозное пучение, миграцию влаги и осадки оттаивания. В версиях PLAXIS 2024–2025 годов модель FUS откалибрована по результатам лабораторных и натурных испытаний для условий российского Севера [37] и применена при расчетах протяженных участков автодорог в Казахстане и Финляндии [38].

COMSOL Multiphysics (разработчик – шведская компания COMSOL) – универсальная программная платформа для мультифизического моделирования, активно используемая в последние

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

годы (включая версии 6.0–6.3, выпущенные в 2021–2024 гг.) для решения связанных ТНМ-задач промерзания грунтов. Реализация модели связанного теплопереноса в пористых средах (coupled heat transfer in porous media) и встроенного модуля дифференциальных уравнений в частных производных (PDE, partial differential equations) позволяет описывать миграцию влаги, морозное пучение, осадки оттаивания и образование ледяных линз. Верификация этой COMSOL-модели по данным полевых испытаний показала абсолютные погрешности расчета деформаций пучения 1,75–3,6 мм и осадок оттаивания 0,75–1,73 мм.

Midas GTS NX (разработчик – южнокорейская компания MIDAS IT) – геотехнический пакет программ, активно используемый в РФ с 2018 года наряду с PLAXIS. Имеет встроенный модуль теплофизического моделирования с учетом фазовых переходов и применяется для расчета оснований на мерзлых грунтах. Вопросы верификации этого модуля по российским нормам рассмотрены в статье [39].

OpenGeoSys (OGS) – открытый мультифизический конечноэлементный пакет программ (развивающийся в Германии с 1980-х годов по настоящее время научным консорциумом под эгидой Центра экологических исследований имени Гельмгольца), в который добавлены модули для ТНМ-расчетов мерзлых грунтов.

Frozen-ground-fem – открытый прикладной программный пакет на языке Python 3 (разработанный в канадском Университете Калгари и опубликованный в 2025 году), предназначенный для ТНМ-моделирования поведения грунтов в холодных регионах. Он позволяет определять сезонные колебания температуры грунтов, оценивать глубину их промерзания, прогнозировать оттаивание многолетнемерзлых пород (ММП) и моделировать консолидацию грунтов в процессе эволюции коэффициента пористости при больших деформациях [38, 40].

Отметим, что, несмотря на широкие возможности современных программных средств, основы численного прогноза промерзания грунтов в российской практике были заложены значительно раньше. Так, на кафедре мерзлотоведения (ныне геокриологии) геологического факультета Московского государственного университета уже в 1950–1960-х годах начали заниматься математическим моделированием температурного режима ММП [41], а в 1980–1990-х годах – прогнозированием негативных геокриологических последствий

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

потепления климата на всей территории криолитозоны. Эти разработки используются при оценке устойчивости инфраструктуры в Арктической зоне РФ в рамках мониторинга многолетней мерзлоты силами Росгидромета и Арктического и антарктического научно-исследовательского института (ААНИИ) при участии МГУ в соответствии с программой Минприроды РФ по созданию системы государственного фонового мониторинга ММП, рассчитанной на 2023–2025 годы и позже продленной до 2028 года.

В Томском государственном архитектурно-строительном университете (ТГАСУ) на основе аналитических моделей и алгоритмов, разработанных в 1960–1980-х годах, был создан комплекс программ для расчета нестационарного трехмерного термомеханического поведения системы «сооружение – основание» с учетом фазовых переходов поровой воды в интервале температур замерзания [1–5, 42]. Механическое поведение зданий в данном комплексе описывается моделью упругохрупкого поведения пластинчато-стержневой системы, а теплофизические и механические характеристики грунта принимаются зависящими от его температуры и вычисляются через количество незамерзшей воды в порах. Модели, реализуемые в этом программном продукте, не учитывают миграцию влаги к фронту промерзания.

В Центральном научно-исследовательском институте транспортного строительства (ЦНИИС) в 1970–1980-х годах был разработан комплекс алгоритмов, которые легли в основу программ для ЭВМ, позволявших выполнять расчет трехмерных температурных полей в теле и основании железнодорожных сооружений. Такие прогнозы выполнялись без учета миграции влаги к фронту промерзания. Параллельно данные алгоритмы передавались и адаптировались на Тындинской мерзлотной станции, в Сибирском научно-исследовательском институте транспортного строительства (СибЦНИИС) и в Московском институте инженеров транспорта (МИИТ). Они были заложены в основу отраслевых стандартов в 1990-е годы (после создания корпорации «Трансстрой», куда вошел ЦНИИС). Дальнейшее развитие программ на базе этих алгоритмов продолжается по сей день.

В 1987 году в московском институте «Фундаментпроект» были разработаны республиканские строительные нормы РСН 67-87 по прогнозу температурного режима ММП численным (конечноразностным) методом путем решения уравнения нестационарной теплопроводности с

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

учетом фазовых переходов грунтовой влаги в трехмерной постановке, но без учета миграции влаги, конвективного и лучистого теплопереноса в грунтах.

Институтом мерзлотоведения СО РАН начиная с 1990-х годов велась разработка математических алгоритмов, которые впоследствии легли в основу специализированного пакета программ для расчета температурного режима грунтов в мерзлотных условиях Якутии (этот пакет активно разрабатывался в 2010–2015 гг.). В качестве математической модели была принята одномерная задача Стефана, решаемая в полубесконечной неоднородной (многослойной) области с подвижной верхней границей для поиска динамики температурных полей в многофазной среде и скоростей перемещения границ зон с одинаковыми фазами (зон талых и мерзлых грунтов). Эта модель не учитывает фазовые переходы в снегу, свойства которого принимаются не зависящими от температуры, но рассматриваются как функции времени.

Новые тенденции в программном обеспечении (2020–2026 гг.)

Анализ публикаций последних пяти лет позволяет выделить четыре ключевых тренда в развитии вычислительных методов для мерзлых грунтов.

1. Переход от двух- и трехфазных моделей к многокомпонентным – учет не только льда и незамерзшей воды, но и поровых газов, рассолов, а также химических процессов в термогидромеханикохимических (ТНМС) моделях [31].

2. Интеграция вычислительных методов с физически информированными нейронными сетями – введение классического уравнения теплопроводности в качестве функции потерь нейронной сети, что обеспечивает физическую корректность прогнозов при ограниченном объеме данных [18, 43].

3. Многоуровневое моделирование на основе интеграции метода материальных точек с методом дискретных элементов – возможность сочетания расчетов в инженерном масштабе (на макроуровне) с описанием контактных взаимодействий «частицы – лед» на микроуровне [19].

4. Появление открытых программных продуктов (OpenGeoSys, frozen-ground-fem) и общедоступных пользовательских расширений для

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

платформы COMSOL с публикацией исходного кода и тестовых задач – упрощение верификации, воспроизводимости и независимой калибровки моделей.

Перечисленное отражает общую тенденцию развития от детерминированных расчетов отдельных объектов к вероятностной оценке устойчивости целых регионов в условиях климатических изменений.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

Напряженно-деформированное поведение мерзлых грунтов по сравнению с немерзлыми в большей степени характеризуется комплексной зависимостью деформаций от температуры, напряжений и времени. Представления о замерзании и оттаивании поровой жидкости в грунтах охватывают сложные термодинамические, гидравлические и механические процессы и имеют большое значение в нескольких областях геомеханики. В зависимости от целей применения были разработаны комплексные геомеханические (определяющие, конститутивные) модели поведения мерзлых грунтов в виде уравнений различной степени сложности, а затем реализованы программно. Такие уравнения описывают математическую связь между напряжениями и деформациями и используются для расчета напряженно-деформированного состояния материалов, в том числе мерзлых грунтов, при действии внешних нагрузок.

В настоящее время разработано множество определяющих уравнений, которые иногда упрощенно называются моделями грунтов [44–62]. Особое место в публикациях занимают обзорные статьи последних лет [63, 64], в которых проанализировано более 400 таких моделей, описанных в работах 2003–2023 годов.

На основе реальных механических испытаний материалов были разработаны нелинейно-упругие, идеально упругопластические, упругопластические с упрочнением и разупрочнением, вязкопластические и другие модели. Обзор подобных моделей для мерзлых грунтов приведен, например, в публикациях [44, 65–67]. Следует отметить в первую очередь роль профессора С.С. Вялова, который во второй половине прошлого столетия разработал фундаментальные положения реологии мерзлых грунтов как сложной многокомпонентной среды.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Существующие определяющие модели поведения мерзлых грунтов можно разделить на несколько категорий:

- 1) основанные на эмпирических зависимостях между напряжениями и деформациями;
- 2) основанные на теории ползучести;
- 3) микромеханические;
- 4) упругопластические;
- 5) упруговязкопластические;
- 6) гипопластические;
- 7) дробно-производные в математическом смысле (фрактальные в физическом смысле);
- 8) основанные на данных (data-driven) на базе машинного обучения.

Последние две категории сформировались как самостоятельные направления в 2010–2020-х годах.

Классификация основных типов определяющего моделирования наглядно показана на рисунке 1.

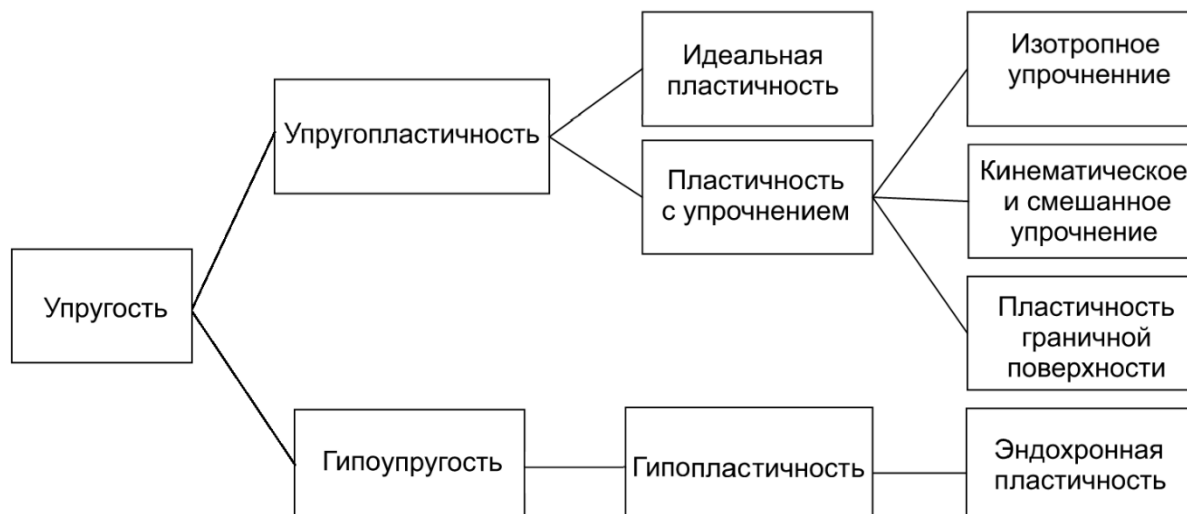


Рис. 1. Типы моделирования поведения мерзлых грунтов

Это многообразие математических подходов, безусловно, полезно для разработчиков, но скорее всего пугает практиков. Однако инженеры-практики должны просто выбирать определяющие модели, подходящие для конкретных задач. При этом им не нужно обладать исчерпывающим опытом в разработке сложных поверхностей течения и сложных законов

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

упрочнения и разупрочнения. С другой стороны, такие пользователи должны быть знакомы с областями применимости и ограничениями моделей по отношению к особенностям поведения грунтов, характерным для конкретных краевых задач. Таким образом, не традиционная классификация, а именно оценка поведения грунтов является более подходящей для пользователей определяющих моделей, работающих в сфере геотехники.

В начальный период исследований механического поведения мерзлых грунтов (примерно в 1950–1990 гг.) оно в большинстве случаев описывалось моделями теории ползучести. Результаты изучения ползучести мерзлых грунтов и льда были представлены в том числе в работах [49–52, 68–90 и др.]. Основное внимание в большинстве из них уделено моделированию первичной и третичной (прогрессирующей) ползучести. В более поздних работах рассмотрены явления прогрессирующей ползучести или ползучести с повреждениями в мерзлых грунтах [47, 92, 94] и хрупкое разрушение [94–98].

Второй подход к описанию напряженно-деформированного поведения мерзлых грунтов основан на использовании вязкопластического моделирования, которое предполагает наличие критерия разрушения [44, 45, 99–102].

Третий подход основан на использовании упругопластического моделирования с включением параметров состояния в виде температуры, скорости деформации и напряжений. Как правило, здесь используются модели критического состояния, предложенные ранее для немерзлых грунтов [17, 53, 54, 104–116]. При этом деформационное поведение обычно описывается двумя основными законами теории пластичности: первый управляет пластической деформацией сдвига, а второй – объемной пластической деформацией.

Четвертый подход, основанный на использовании законов термодинамики, был сформулирован С.С. Вяловым в 1979 году [117]. Он предложил рассматривать грунт как открытую термодинамическую систему, в которой приток тепла обеспечивается не только теплопроводностью и фазовыми переходами, но и массопереносом (миграцией влаги). Этот подход был использован В.Н. Разбегиным [118] при получении уравнения длительной прочности, в котором разрушение определяется критическим значением работы вязкопластических деформаций. В дальнейшем применение термодинамического подхода

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

было развито в работах М.М. Дубины (2003) и других авторов [4, 119 и др.].

Выбор оптимального подхода к оценке поведения мерзлых грунтов зависит от типа рассматриваемой задачи и свойств мерзлого материала. Предполагается, что уравнение состояния, учитывающее первичные, вторичные и третичные эффекты ползучести, будет более применимым при медленном изменении положения фронта промерзания, тогда как уравнение состояния, учитывающее вязкопластические эффекты, будет более подходящим для ситуаций, когда промерзание происходит относительно быстро (так что при изменении структуры грунта не хватает времени для релаксации напряжений).

Подробные сведения о прочности и деформируемости грунтов как в мерзлом, так и в оттаивающих состояниях приведены в специализированной литературе. Результаты подобных исследований используются при разработке определяющих уравнений для мерзлых грунтов, которые описывают зависимости между напряжениями и деформациями при упругом, упругопластическом, вязкопластическом, упруговязкопластическом и ином механическом поведении.

Новые направления в определяющем моделировании (2020–2026 гг.)

После 2020 года в исследованиях оформилось несколько новых направлений с созданием следующих типов определяющих моделей поведения грунтов, которые дополняют традиционную классификацию:

- 1) модели критического состояния, расширенные для возможности описания грунтов в мерзлом состоянии (extended Critical State, eCS) – учитывают температуру как параметр состояния наравне с напряжением и плотностью, реализованы в программных комплексах COMSOL и ABAQUS [17];
- 2) модели с двумя поверхностями текучести (Two-Surface Plasticity) – отдельно описывают объемную и сдвиговую пластические деформации мерзлого грунта с учетом ледяного цементирования [30];
- 3) модели связанных частиц на основе метода дискретных элементов, иногда называемые бонд-контактными DEM-моделями (Bonded Particle Models, BPM) – описывают разрушение цементационных связей «лед – частица» на

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

микроуровне с последующей передачей макроскопических откликов в программный модуль для численного расчета на основе метода материальных точек (МРМ-решатель) [19];

- 4) дробно-производные в математическом смысле (фрактальные в физическом смысле) реологические модели (модели Абеля, Бингама – Абеля, обобщенные модели Кельвина с производными дробного порядка) – описывают все три стадии ползучести с использованием минимального количества параметров [120, 121];
- 5) модели на основе механики повреждений (damage mechanics) – описывают упрочнение-разупрочнение через скалярную переменную повреждения $D(t)$, позволяющую отразить нелинейное поведение грунта на третьей стадии развития ползучести (прогрессирующего течения) [97, 122, 123];
- 6) гибридные физико-статистические модели на основе физически информированных нейронных сетей или с нейросетевым расширением (PINN-models, NN-augmented constitutive models соответственно) – в дополнение к математическому аппарату используют нейронную сеть для аппроксимации невязки классической модели по экспериментальным данным [18].

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Известно, что механические свойства мерзлых грунтов подобны свойствам льда. Поэтому первоначально определяющие уравнения и условия прочности, разработанные для такого материала, как лед, использовались и для мерзлых грунтов.

Значительный вклад в развитие определяющих уравнений состояния и условий прочности мерзлых грунтов внесен многочисленными работами, выполненными как в России, так и за рубежом. Здесь можно примерно выделить три периода исследований – 1960–1999, 2000–2017 и 2018–2026 годов. В первую очередь следует отметить опубликованные в первый период работы отечественных ученых [69–77, 117, 124, 125] и зарубежных исследователей [92, 126–128], а также публикации за третий период [17, 97, 122, 123, 129 и др.].

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

В то же время исследования свойств ползучести мерзлых грунтов можно разделить на те, в которых рассмотрены микроскопические изменения в грунте [130–134], и те, которые имеют общий феноменологический характер [44, 135–142]. После 2020 года начали развиваться многоуровневые подходы, объединяющие оба эти направления [19].

С учетом сложного деформационного поведения мерзлых грунтов в 1960–1970-х годах были предложены эмпирические модели для описания их деформаций и прочности (типичная кривая развития ползучести и ее сопоставление с соответствующими кривыми упрочнения и накопления повреждений показаны на рисунке 2). Было разработано большое количество моделей для описания поведения мерзлых грунтов на разных стадиях развития ползучести – неустановившейся ползучести; установившегося вязкопластического течения и прогрессирующего течения (первичной, вторичной и третичной ползучести соответственно).

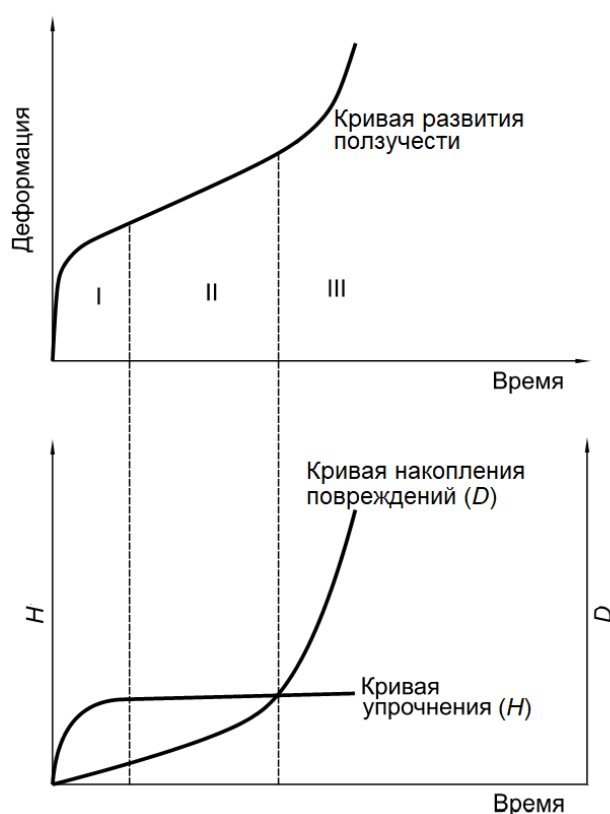


Рис. 2. Кривые развития ползучести, накопления повреждений и упрочнения.

Обозначения: I – стадия неустановившейся ползучести; II – стадия установившегося вязкопластического течения; III – стадия прогрессирующего течения; H – функция упрочнения, D – функция накопления повреждений. Деформационное поведение

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

грунта определяется совместным воздействием процессов упрочнения и накопления повреждений, а переход грунта к стадии прогрессирующего течения и разрушению обусловлен интенсивным накоплением микроструктурных повреждений

Большинство моделей ползучести основано на следующих положениях:

- 1) ползучесть и прочность мерзлого грунта являются разными, но близко связанными свойствами, описываемыми различными определяющими уравнениями и критериями разрушения;
- 2) развитие ползучести мерзлых грунтов является процессом, включающим три стадии – неустановившейся (*первичной*) ползучести, установившегося вязкопластического течения (*вторичной* ползучести) и прогрессирующего течения (*третичной* ползучести, в более современных работах называемой также ускоренной ползучестью);
- 3) разрушение мерзлых грунтов происходит в конце второй или третьей стадии развития ползучести.

На основе результатов испытаний образцов мерзлых грунтов были предложены модели для описания их поведения на разных стадиях ползучести с включением зависимостей деформации ползучести от температуры, времени, уровня напряжений, содержания льда [72, 84, 143–148]. Например, в работе Шао и др. [149] показано, что при низких постоянных нагрузках кривая деформаций ползучести является затухающей, а при нагрузке порядка $0,75 \sigma_t$ (где σ_t – предел длительной прочности, нижний индекс t указывает на фактор времени) затухания деформаций не происходит и они переходят в стадию прогрессирующего течения. Эти авторы также установили, что температура является главным внешним фактором, влияющим на ползучесть мерзлого грунта, а доля льда – главным внутренним фактором.

Эти эмпирические (феноменологические) модели были получены на основе анализа определенных условий испытаний. Они не отражают многие факторы, такие как изменения микроструктуры и макроструктуры в процессе деформирования, влияние траекторий напряжений, упрочнение и разупрочнение и др. С другой стороны, такие модели просты и имеют ясно определяемые параметры, что является весьма привлекательным с практической точки зрения [44]. Большинство лабораторных испытаний

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

для их разработки было выполнено с песком, так как в этом случае идентичные по свойствам образцы легко подготовить и, следовательно, получить многочисленные данные, которые можно статистически обработать.

Согласно гипотезе, выдвинутой С.С. Вяловым, связи между частицами мерзлого грунта обусловлены молекулярными силами взаимодействия, структурным сцеплением и цементирующим действием льда. Он предложил следующую схематическую модель для мерзлых грунтов: когда к образцу приложена внешняя нагрузка, концентрация напряжений на контактах между частицами приводит к пластическому течению и плавлению льда из-за давления. Талая вода мигрирует в зоны пониженных напряжений и замерзает. Одновременно структурные и льдоцементационные связи в местах плавления ослабевают и минеральные частицы начинают проскальзывать друг относительно друга. Это сопровождается переориентацией кристаллов льда и взаимным смещением и изменением пространственной ориентации частиц грунта. Процесс переориентации ледяных кристаллов имеет тенденцию ослаблять всю систему, так как плоскости граней этих кристаллов склонны к выравниванию по направлению скольжения. Но при этом перестройка структуры грунта за счет минерального скелета может приводить как к ослаблению, так и к упрочнению системы. Вялов предположил, что, когда упрочнение системы превышает ослабление в течение нагружения, ее деформирование принимает затухающий характер (проявляется ее затухающая ползучесть).

Отметим, что буквенные обозначения в приводимых далее уравнениях и на рисунках не всегда совпадают с таковыми в первоисточниках. В настоящем обзоре они для удобства восприятия согласованы между собой в пределах раздела «Феноменологические модели ползучести с переменной температурой» и отдельно в пределах раздела «Дробно-производные (фрактальные) модели ползучести».

В 1954 году Вялов предложил описывать деформацию ползучести как функцию температуры и времени в виде следующей степенной зависимости:

$$\varepsilon(t) = A_0 \cdot (T + 1)^{m_T} \cdot t^\alpha, \quad (1)$$

где $\varepsilon(t)$ – относительная деформация ползучести в момент времени t ; A_0 – эмпирический коэффициент пропорциональности; T – температура; m_T –

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

эмпирический показатель степени влияния температуры на величину деформации ползучести мерзлого грунта; t – время, прошедшее с момента приложения нагрузки; α – эмпирический параметр затухания деформации во времени ($0 < \alpha < 1$).

Эта модель действительна для стадий первичной и вторичной ползучести и не моделирует поведение грунта при больших изменениях напряжений.

Полная (суммарная) относительная деформация грунта ε в момент времени t определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_s, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \frac{\sigma}{E}; \\ \varepsilon_p &= A_0 \sigma^{m_\sigma} t^\alpha; \\ \varepsilon_s &= B \sigma t; \end{aligned} \quad (3)$$

ε_e – мгновенная упругая деформация; ε_p – деформация на первой стадии ползучести; ε_s – деформация на второй стадии ползучести; σ – приложенное напряжение; E – модуль упругости; m_σ – эмпирический показатель степени чувствительности мерзлого грунта к напряжению; B – эмпирический коэффициент пропорциональности.

Вялов показал, что при $\alpha < 1$ деформация ползучести носит затухающий характер. Незатухающую ползучесть сложно описать математически, так как деформация при этом зависит не только от внешней нагрузки, но и от скорости деформирования вследствие эффекта упрочнения.

Одквист и Хюльт [150] разработали идеализированную модель ползучести в форме псевдомгновенной деформации, где принимается, что полная деформация $\varepsilon(0)$ в начальный момент приложения нагрузки (при $t=0$) является суммой мгновенной упругой деформации ε_e и пластической деформации ε_p :

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (4)$$

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Если пренебречь пластической деформацией, то уравнение для полной деформации $\varepsilon(t)$ в момент времени t имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_c(t), \quad (5)$$

где $\varepsilon_c(t)$ – деформация ползучести в момент времени t (в данном случае без деления на стадии).

Скорость накопления деформации ползучести $\dot{\varepsilon}$ может быть найдена по формуле:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \omega \cdot |T - T_0|^k \cdot \sigma^{m_\sigma} \cdot t^{\alpha-1}, \quad (6)$$

где T – текущая температура, °C (в исходной модели Вялова это всегда отрицательное число); T_0 – температура начала отсчета, то есть условная температура замерзания, или фиксированный нуль на температурной шкале данной модели (обычно принимается $T_0 = -1$ °C, поскольку из-за давления и капиллярных эффектов вода в порах грунта не замерзает полностью при 0 °C, а интенсивные фазовые превращения там происходят в диапазоне от 0 °C до минус 1 °C); $|T - T_0|$ – модуль разности температур (интервал), °C; ω – эмпирический коэффициент; k – эмпирический показатель степени влияния температуры на скорость развития деформации ползучести и длительную прочность мерзлого грунта.

Как следует из формулы (6), скорость деформации уменьшается во времени – следовательно, данная модель применима только для первичной стадии ползучести. Если эту формулу представить в логарифмическом виде, то при постоянных значениях температуры и напряжения ($T = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$) получается линейная зависимость между $\lg(d\varepsilon/dt)$ и $\lg t$.

Параметры длительной прочности мерзлых грунтов модели Вялова могут быть получены путем подгонки серии кривых к экспериментальным данным в логарифмическом масштабе по обеим осям. В начале зависимость скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$ от приложенного напряжения σ используется для определения показателя A_σ , характеризующего зависимость деформаций ползучести мерзлого грунта от напряжений и времени:

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

$$A_t = \frac{t^\lambda}{\xi |T-T_0|^k}, \quad (7)$$

где λ – эмпирический показатель степени чувствительности грунта ко времени действия напряжения; ξ – эмпирический параметр длительной прочности).

Затем строятся графики изменений A_t во времени t при различных температурах в логарифмическом масштабе по обеим осям, чтобы найти пересечения этих графиков с линией $R=A_t t^\lambda$ (где R – вспомогательный расчетный реологический параметр) и их угловые коэффициенты λ (наклоны). Определяются значения R в этих точках пересечения. В итоге в логарифмическом масштабе строится график зависимости R от $|T-T_0|$ для определения величины ξ (отрезка, отсекаемого этой линией на оси параметра R) и значения k (наклона данной линии к оси $|T-T_0|$).

Клейн и Йессбергер [127] предложили математическую модель для описания ползучести мерзлых грунтов через изменяющуюся вязкость (поскольку ползучесть и вязкое течение в реологии мерзлых грунтов являются неразрывно связанными понятиями):

$$\bar{A} = A \alpha t^{\alpha-1}, \quad (8)$$

где $\bar{A}$ – показатель вязкости для момента времени t ; A – эмпирический коэффициент; α – эмпирический показатель упрочнения грунта (затухания деформации) во времени.

На рисунках 3 и 4 представлен пример определения показателя вязкости $\bar{A}$ (зависящего от времени и температуры) и эмпирического безразмерного показателя чувствительности грунта к напряжению m_σ (не зависящего от времени и температуры).

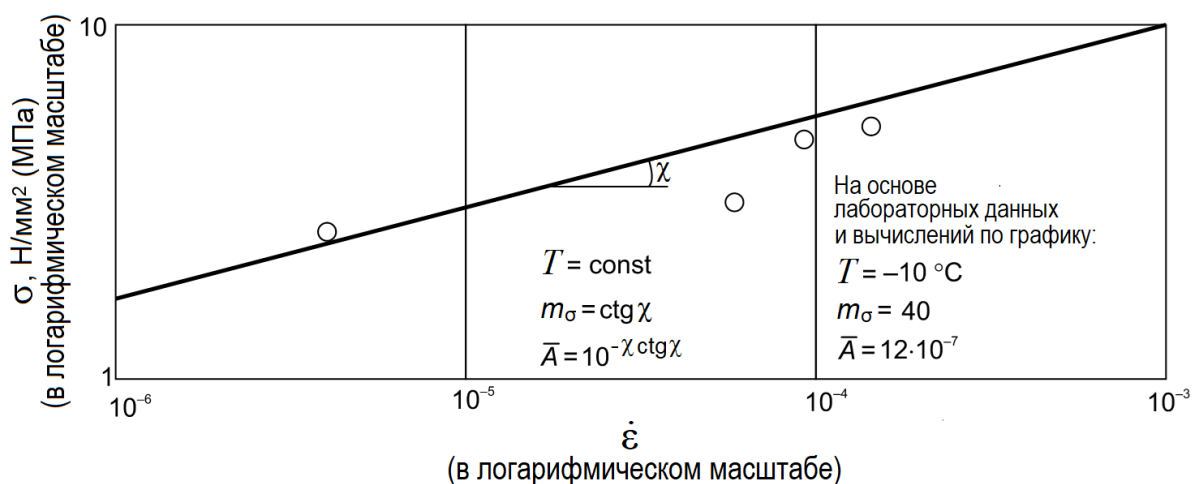


Рис. 3. Определение параметров $\bar{A}$ и m_σ (по [127]). Обозначения: σ – приложенное напряжение; $\dot{\epsilon}$ – скорость накопления деформации ползучести; $\bar{A}$ – показатель вязкости; m_σ – эмпирический безразмерный показатель чувствительности грунта к напряжению; T – температура; χ – геометрический угол наклона аппроксимирующей прямой на графике

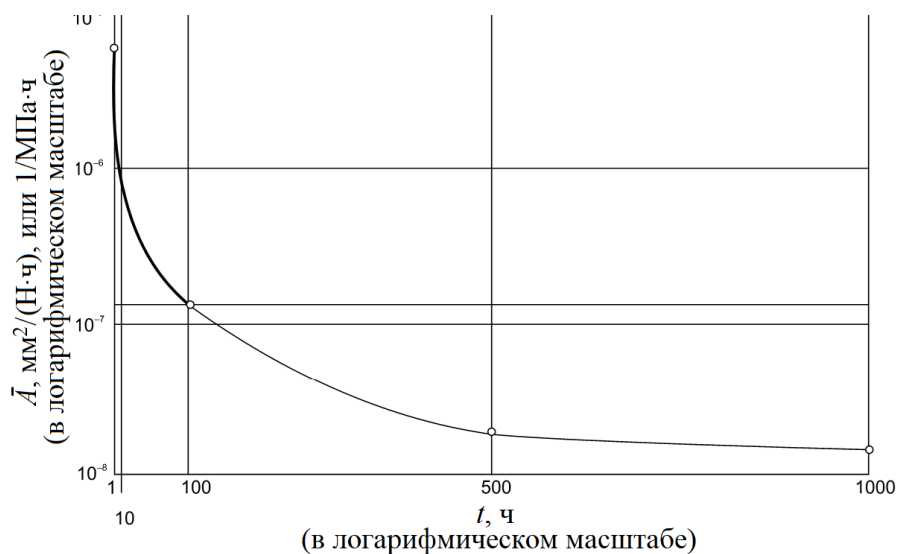


Рис. 4. Изменение показателя вязкости $\bar{A}$ во времени (по [127])

Сэйлс (позже в соавторстве с Хэйнсом) [126, 151, 152] успешно применил модель Вялова при моделировании поведения мерзлого песка Оттавы в условиях трехосного сжатия и трехосных испытаний на ползучесть. Был сделан вывод, что модель Вялова хорошо описывает первую стадию ползучести. Сэйлс [126] предложил модифицированную модель Вялова для определения текущей скорости деформирования при первичной ползучести $\dot{\epsilon}$ в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{t_b}{t} \right)^{\frac{1}{M}}, \quad (9)$$

где t_b – базисный интервал времени для данной модели (фиксированное значение, обычно 1 ч); t – текущее время, прошедшее с момента приложения нагрузки в изучаемой системе; M – эмпирический безразмерный показатель (функция температуры и напряжения), определяющий темп изменения скорости деформации во времени ($M > 0$, $M \neq 1$); $\dot{\varepsilon}_0$ – прогнозируемая скорость деформирования на старте модели, которая является функцией напряжения в изучаемой системе σ (значение которого может отличаться от лабораторного σ_k) и определяется по формуле:

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_k \left(\frac{\sigma}{\sigma_k} \right)^{m_\sigma}, \quad (10)$$

где σ_k и $\dot{\varepsilon}_k$ – напряжение и соответствующая скорость деформирования при конкретном лабораторном испытании (фиксированные значения); σ – приложенное напряжение в изучаемой системе; m_σ – эмпирический безразмерный показатель чувствительности грунта к напряжению.

Если подставить выражение (10) в формулу (9) и проинтегрировать полученное уравнение по времени t , то получается формула для определения деформации первичной ползучести ε_p :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_k} \right)^{m_\sigma} \cdot \left(\frac{t}{t_k} \right)^M, \quad (11)$$

где ε_k – эмпирическая деформация грунта, соответствующая приложенному напряжению σ_k ; t_k – эмпирическая длительность испытания (фиксированное число, например 100 ч);

Чжу и др. [148, 153], а также У и др. [154–156] провели большое количество одноосных испытаний различных типов мерзлых грунтов на сжатие и ползучесть при разной температуре и разной скорости деформирования. Анализ полученных ими результатов позволил предложить два типа зависимостей «напряжения – деформация» при упругопластическом и вязкопластическом поведении. Однако в этих

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

уравнениях не учитывалось влияние среднего напряжения (всестороннего давления), а разрушение описывалось условием прочности Мизеса.

Ладаньи [84] предложил уравнение для деформации мерзлого грунта ε , накопленной к моменту времени t на второй стадии ползучести в изучаемой системе, которое было разработано для решения задачи о несущей способности фундаментов и анкеров:

$$\varepsilon = \varepsilon_l \left[\frac{\sigma}{\sigma_l(T)} \right]^r + \dot{\varepsilon}_b \left[\frac{\sigma}{\sigma_l(T)} \right]^s t, \quad (12)$$

где ε_l – произвольно выбираемая малая мгновенно-пластическая деформация в момент приложения нагрузки (это условная эталонная математическая величина, введенная для удобства вычислений и отображения данных, обычно принимаемая равной 10^{-3} , или 1%; упругая деформация здесь отдельно не выделяется, а входит в общее понятие мгновенно-пластической деформации); $\dot{\varepsilon}_b$ – произвольно выбираемая эталонная/базовая скорость накопления малой деформации ползучести, принимаемая за точку отсчета и служащая для приведения модели к нормализованному виду; $\sigma_l(T)$ – напряжение, зависящее от температуры и пропорционально меняющееся при изменении выбора величины $\dot{\varepsilon}_b$; σ – приложенное напряжение в изучаемой системе; r – безразмерный эмпирический показатель степени нелинейности связи «деформация – напряжение»; s – безразмерный эмпирический показатель степени нелинейности связи «скорость накопления деформации установившейся ползучести – напряжение».

Следует отметить, что данная модель была получена путем совмещения графиков развития во времени деформаций первичной и вторичной ползучести и их аппроксимации единой прямой линией, которая имеет тот же наклон, что и для второй стадии (поскольку график первичной ползучести криволинеен). Это означает, что модель Ладаньи может корректно описывать процесс накопления деформации только для второй стадии ползучести (установившейся).

Ассур [135] и Фиш [157, 158] для описания скорости накопления деформации ползучести $\dot{\varepsilon}$ на всех трех стадиях предложили обобщенную модель:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}_m}{e^\beta} \left(\frac{t_m}{t} \right)^\beta e^{\frac{\beta \cdot t}{t_m}}, \quad (13)$$

где $\dot{\varepsilon}_m$ – экспериментально определенная минимальная скорость ползучести; e – основание натурального логарифма; t_m – экспериментально определенное время достижения минимальной скорости ползучести (соответствующее точке перехода к стадии прогрессирующего разрушения, которую определяют по перегибу на графике развития деформации во времени); β – безразмерный эмпирический показатель степени, определяющий темп изменения скорости деформации ползучести во времени и зависящий от температуры и суммарного содержания воды (замерзшей и жидкой) в мерзлом грунте; t – время с момента приложения нагрузки в изучаемой системе.

Фиш [157, 158] показал, что данная модель позволяет найти деформацию ползучести при различных напряжениях. Однако ее практическое применение для оценки длительного поведения мерзлого грунта под нагрузкой характеризуется большой трудоемкостью экспериментального определения параметров $\dot{\varepsilon}_m$ и t_m , поскольку для этого требуется проведение длительных лабораторных испытаний образцов вплоть до стадии их прогрессирующего разрушения.

Тинг [138] также предложил единую модель скорости накопления деформации ползучести $\dot{\varepsilon}$ мерзлых грунтов (песков) на всех трех стадиях в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon} = A_s e^{\mu t} t^{-m}, \quad (14)$$

где A_s – эмпирический коэффициент, определяющий начальный уровень скорости деформации ползучести при заданных условиях (зависящий от приложенного напряжения и температуры); μ – эмпирический показатель степени интенсивности (скорости) деградации структуры мерзлого грунта и зависящий от напряжения и температуры; μt – мера накопленных структурных нарушений к моменту времени t ; m – эмпирический показатель степени интенсивности затухания деформации (упрочнения) мерзлого грунта на первой стадии ползучести.

Сравнение с моделями первичной и вторичной ползучести (11) и (12) показало, что модель Тинга (14) действительно применима для

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

определения скорости деформации мерзлых песчаных грунтов на всех трех стадиях. Однако ее можно использовать только в случаях достаточно высоких нагрузок, способных вызвать разрушение при ползучести.

Кроме того, можно показать, что эти типичные модели имеют следующие общие недостатки:

- 1) их математические выражения содержат время как явную переменную; если время приближается к бесконечности, то накопленная деформация ползучести (или ее скорость для модели Тинга) также будет приближаться к бесконечности, что противоречит результатам длительных испытаний;
- 2) разработанные специально для описания ползучести мерзлого грунта, они не позволяют эффективно учесть другие реологические свойства, такие как деградация прочности и влияние скорости деформирования при нагружении и разгрузке.

Цай и др. [122] предложили для мерзлого грунта вязкопластическую модель, в которой упругие объемные деформации и вязкопластические деформации сдвига разделены в следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk} \\ e_{ij} = JS_{ij} + \gamma(A_f(F)) \frac{\partial F}{\partial S_{ij}} \end{cases}, \quad (15)$$

где K – модуль объемного сжатия; σ_{kk} , ε_{kk} — инварианты тензоров напряжений и деформаций соответственно; e_{ij} – компоненты девиатора тензора деформаций ползучести; S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; J – функция (модуль) ползучести при сдвиге; γ – эмпирический коэффициент (параметр) текучести, определяющий базовый уровень накопленной вязкопластической деформации сдвига; F – функция текучести, определяющая поверхность текучести (то есть условие перехода мерзлого грунта в вязкопластическое состояние) и зависящая от текущего напряженного состояния грунта; $A_f(F)$ – эмпирическая скалярная функция текучести F .

Функция (модуль) ползучести при сдвиге $J(t, \tau)$ определяется следующим образом:

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

$$J(t, t_0) = \frac{1}{2G} + \frac{1}{2G_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{P\alpha_p} (t - t_0)\right) \right], \quad (16)$$

где t – текущий момент времени, в который оценивается деформация; t_0 – момент времени приложения сдвиговой нагрузки; $(t - t_0)$ – продолжительность действия неизменной сдвиговой нагрузки до момента оценки деформации; G – мгновенный модуль сдвига, описывающий условно-мгновенную упругую реакцию мерзлого грунта в момент приложения нагрузки; G_0 – длительный модуль сдвига вязкоупругого элемента Кельвина – Фойгта, характеризующий жесткость грунта при затухании вязкого течения; P – среднее напряжение в грунте; α_p – эмпирический коэффициент, характеризующий влияние среднего напряжения на время запаздывания вязкоупругих деформаций (численно равное произведению $P\alpha_p$).

Скалярная функция текучести $A_f(F)$ определяется уравнением:

$$A_f(F) = \left(\frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_L} - 1 \right)^\zeta, \quad (17)$$

где J_2 – второй инвариант девиатора напряжений, характеризующий интенсивность сдвиговых напряжений в грунте; σ_L – эмпирический предел длительной прочности мерзлого грунта при заданных температуре и уровне напряжений; ζ – безразмерный эмпирический показатель степени нелинейности накопления вязкопластических деформаций сдвига.

Параметры модели Цая и др. [122] определяются на основе экспериментальных данных и методики калибровки, описанной в их последующей работе [123]. Эта модель была применена для описания затухающей и прогрессирующей ползучести мерзлых песчаных грунтов при монотонном и циклическом нагружении. Однако, как видно из системы уравнений (15), она не может описать необратимую объемную деформацию (дилатансию) мерзлых грунтов.

Фиш [49, 50] разработал трехмерную вязкопластическую модель, объединяющую ползучесть и прочность, для описания реологического поведения поликристаллического льда при сложном напряженном состоянии. Позднее он развил это представление для описания

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

деформирования мерзлых грунтов [51]. Предложенная им модель основана на следующих предположениях (рис. 5).

1. Ползучесть и прочность мерзлого грунта являются тесно связанными, поэтому процесс его длительного деформирования и разрушения может быть описан единым определяющим уравнением, включающим критерий прочности материала;

2. Процесс развития кратковременной ползучести мерзлого грунта (протекающий при относительно высоких уровнях напряжений и завершающийся разрушением) может быть представлен как двухстадийный, включающий первую и третью стадии (неустановившейся/затухающей ползучести и прогрессирующего течения соответственно). Вторичная ползучесть не рассматривается как самостоятельная стадия установившегося вязкопластического течения и определяется на кривой ползучести только критической точкой М, соответствующей минимальной скорости деформирования, после которой вскоре происходит прогрессирующее разрушение (см. рис. 5).

3. Процесс разрушения мерзлого грунта начинается сразу же после приложения нагрузки и протекает на всех стадиях развития ползучести.

Данная модель мерзлого грунта включает четыре главных элемента: определяющее уравнение ползучести, закон вязкопластического течения, критерий прочности и уравнение критического времени, в котором объединены предыдущие три компонента. В концепции данной модели критическое время t_m , которое соответствует минимальной скорости ползучести и переходу к третьей стадии деформирования, является центральным параметром. Его уравнение объединяет не только все стадии ползучести (что дает возможность полностью описать процесс развития ползучести как при постоянных напряжениях, так и при постоянной скорости деформирования с использованием единого определяющего уравнения), но и параметры длительной прочности с критерием прочности (так что последние могут быть включены в определяющее уравнение для мерзлого грунта).

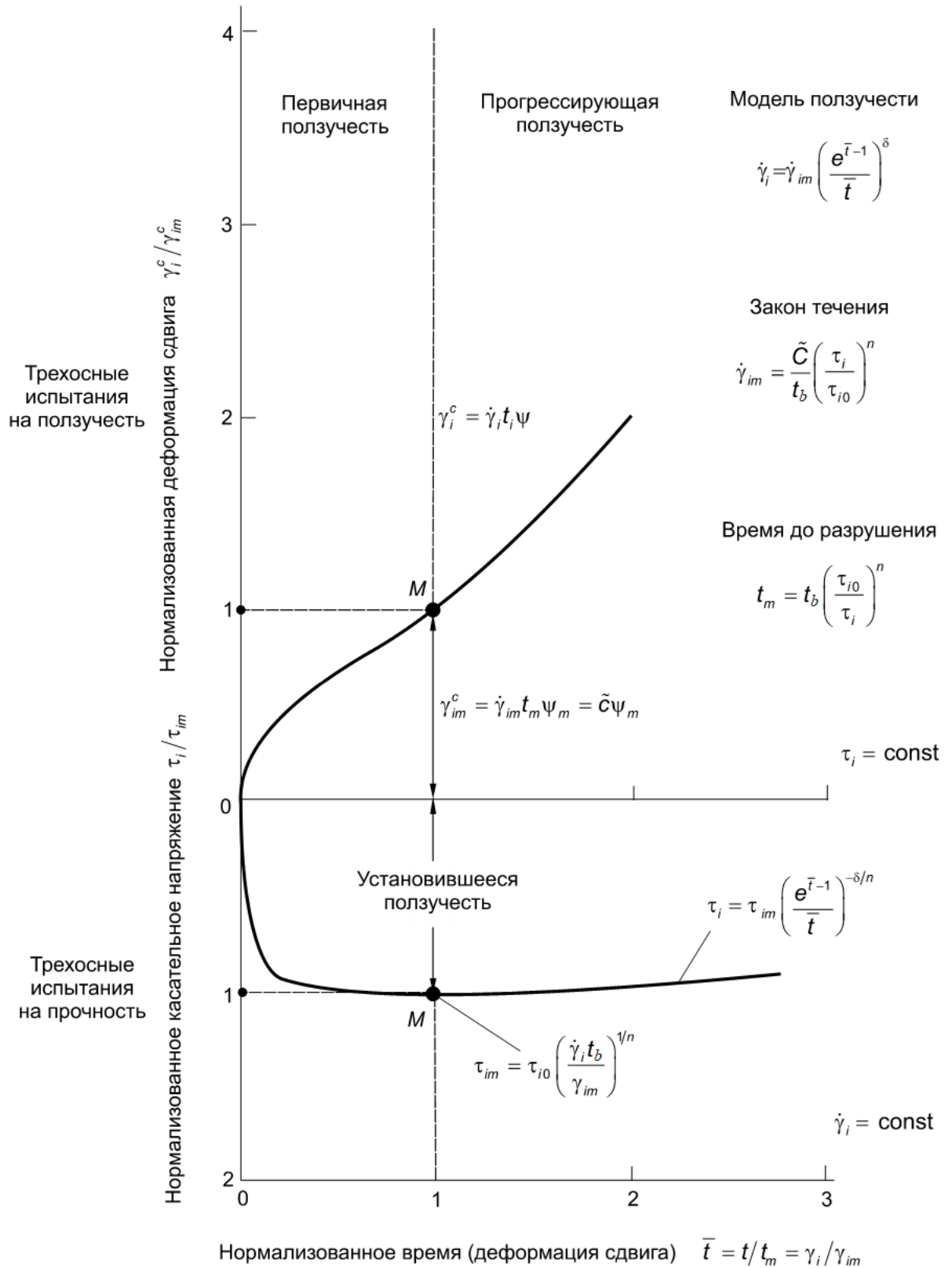
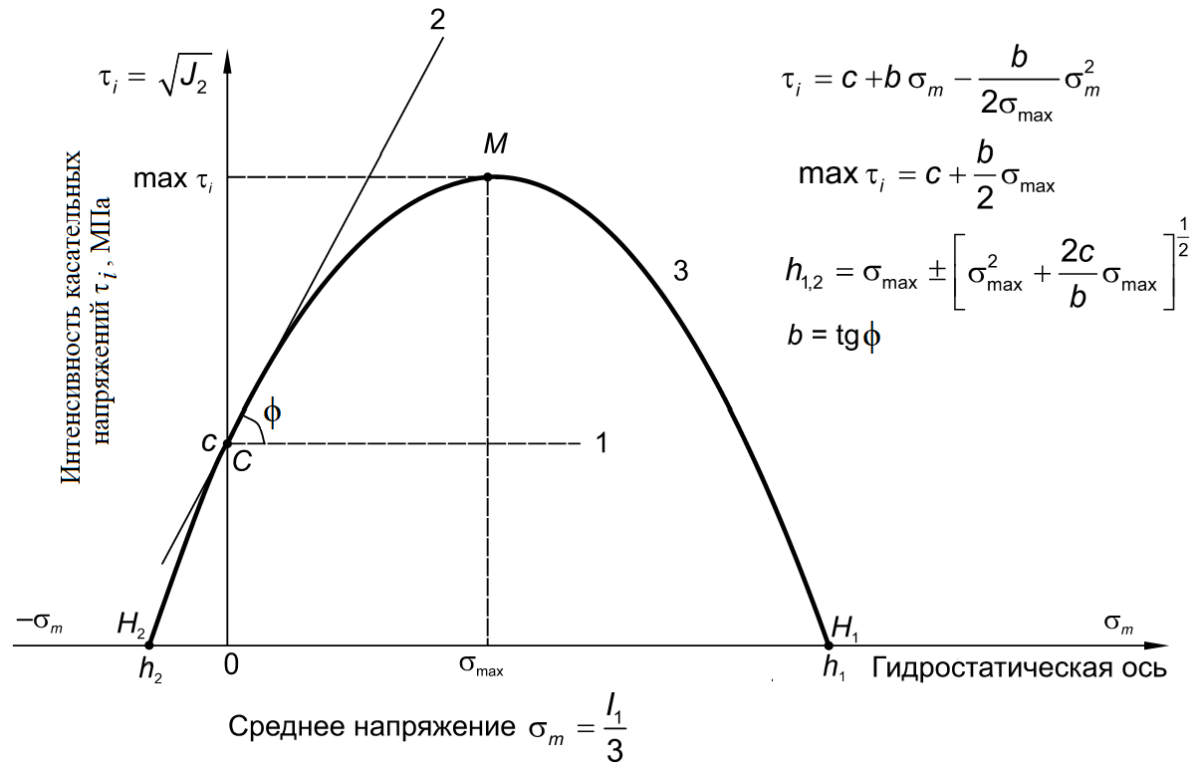


Рис. 5. Предложенная А. Фишем [51] обобщенная модель механического поведения мерзлого грунта, объединяющая результаты трехосных испытаний на ползучесть и прочность. Обозначения: М – критическая точка (точка перегиба кривой), соответствующая минимальной скорости деформирования мерзлого грунта; t – текущее время; t_m – критическое время (время достижения критической точки перегиба М, то есть момента наступления минимальной скорости накопления

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

деформации ползучести); $\bar{t}=t/t_m$ – нормализованное время; t_b – базисный интервал времени для данной модели (фиксированное нормирующее значение, обычно 1 ч); γ_i^c – деформация сдвига при ползучести; γ_{im}^c – критическая деформация сдвига при ползучести в точке М; γ_i^c/γ_{im}^c – нормализованная деформация сдвига при ползучести; $\dot{\gamma}_i$ – скорость деформации сдвига; $\dot{\gamma}_{im}$ – минимальная скорость деформации сдвига; γ_i – текущая деформация сдвига при испытаниях на прочность; γ_{im} – критическая деформация сдвига при испытаниях на прочность (при $\dot{\gamma}_i=\text{const}$); γ_i/γ_{im} – нормализованная деформация сдвига при испытаниях на прочность (служит аналогом нормализованного времени); τ_i – касательное напряжение сдвига; τ_{im} – касательное напряжение сдвига в точке М, принимаемое за предел длительной прочности; τ_i/τ_{im} – нормализованное касательное напряжение сдвига; τ_{i0} – эталонное/базовое касательное напряжение сдвига, численно равно прочности грунта при $t_m=t_b$; n, δ – эмпирические показатели степени; $\tilde{C}$ – эмпирический реологический параметр, численно равный деформации сдвига в критической точке М; ψ – безразмерная функция, определяющая темп изменения скорости накопления деформации ползучести во времени; ψ_m – значение функции ψ в критической точке М; e – основание натурального логарифма

Фиш также предложил параболическое условие прочности, которое хорошо описывает результаты испытаний мерзлых грунтов и льда на прочность в широком диапазоне всестороннего давления и при различных скоростях деформирования или при разном критическом времени t_m [52] (рис. 6).



ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Рис. 6. Графическое представление условий прочности мерзлого грунта (по [51]).

Обозначения: 1 – критерий пластичности (прочности) Мизеса в виде горизонтальной прямой, отражающей независимость прочности на сдвиг от величины среднего напряжения; 2 – критерий прочности Друкера – Прагера в виде наклонной прямой, отражающей линейный рост сопротивления сдвигу с увеличением всестороннего давления; 3 – параболическое условие прочности Фиша в виде нелинейной огибающей, описывающей как рост прочности при уплотнении грунта, так и ее последующее падение из-за плавления льда при достаточно высоких давлениях; I_1 – первый инвариант тензора напряжений; σ_m – среднее напряжение ($\sigma_m = I_1/3$); J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; τ_i – интенсивность касательных напряжений, характеризующая уровень сдвигового напряжения в грунте при трехосном сжатии ($\tau_i = \sqrt{J_2}$); C – точка пересечения параболы прочности с вертикальной осью τ_i , вертикальная координата которой соответствует удельному сцеплению c , численно равному τ_i при $\sigma_m = 0$; ϕ – угол внутреннего трения, равный углу наклона касательной к параболе прочности в точке ее пересечения с вертикальной осью (в точке C); b – безразмерный эмпирический показатель внутреннего трения, определяющий начальный угол наклона параболической огибающей прочности ($b = \tan \phi$); M – вершина параболы условия прочности Фиша, соответствующая предельной прочности грунта $\max \tau_i$ при оптимальном среднем напряжении $\sigma_{m\max}$; H_1 – точка пересечения параболы с горизонтальной осью (осью среднего напряжения σ_m) справа от нуля, соответствующая пределу всестороннего сжатия грунта (давлению полного плавления порового льда); H_2 – точка пересечения параболы с горизонтальной осью (осью среднего напряжения σ_m) слева от нуля, соответствующая пределу всестороннего растяжения (предельному сопротивлению разрыву); h_1, h_2 – соответствующие горизонтальные координаты точек H_1 и H_2 (по оси σ_m), равные корням квадратного уравнения прочности, приведенного справа от рисунка

Исследования Фиша [52], а также Ма и др. [159] показали, что функция текучести F (условие прочности) может быть принята параболической в следующем виде:

$$F = \sqrt{3J_2} - c - \sigma_m \tan \phi + \frac{\tan \phi}{2p_m} \sigma_m^2, \quad (18)$$

где J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; c – удельное сцепление; σ_m – среднее напряжение, которое равно одной трети первого инварианта тензора главных напряжений ($\sigma_m = I_1/3$); ϕ – угол внутреннего трения при $\sigma_m = 0$; p_m – среднее напряжение, соответствующее максимуму прочности на сдвиг.

При этом величина приращения пластической деформации в данной модели определяется согласно ассоциированному закону течения (то есть вектор пластического течения ортогонален поверхности функции текучести F).

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

На рисунке 7 по работе Городецкого [160] сопоставлены модельные кривые длительной прочности мерзлого грунта и результаты испытаний глины на трехосное сжатие при температуре минус 10 °С. Видно, что расчетные зависимости при разном критическом времени (1 и 12 ч) хорошо согласуются с данными испытаний, что подтверждает применимость указанной модели для решения практических задач.

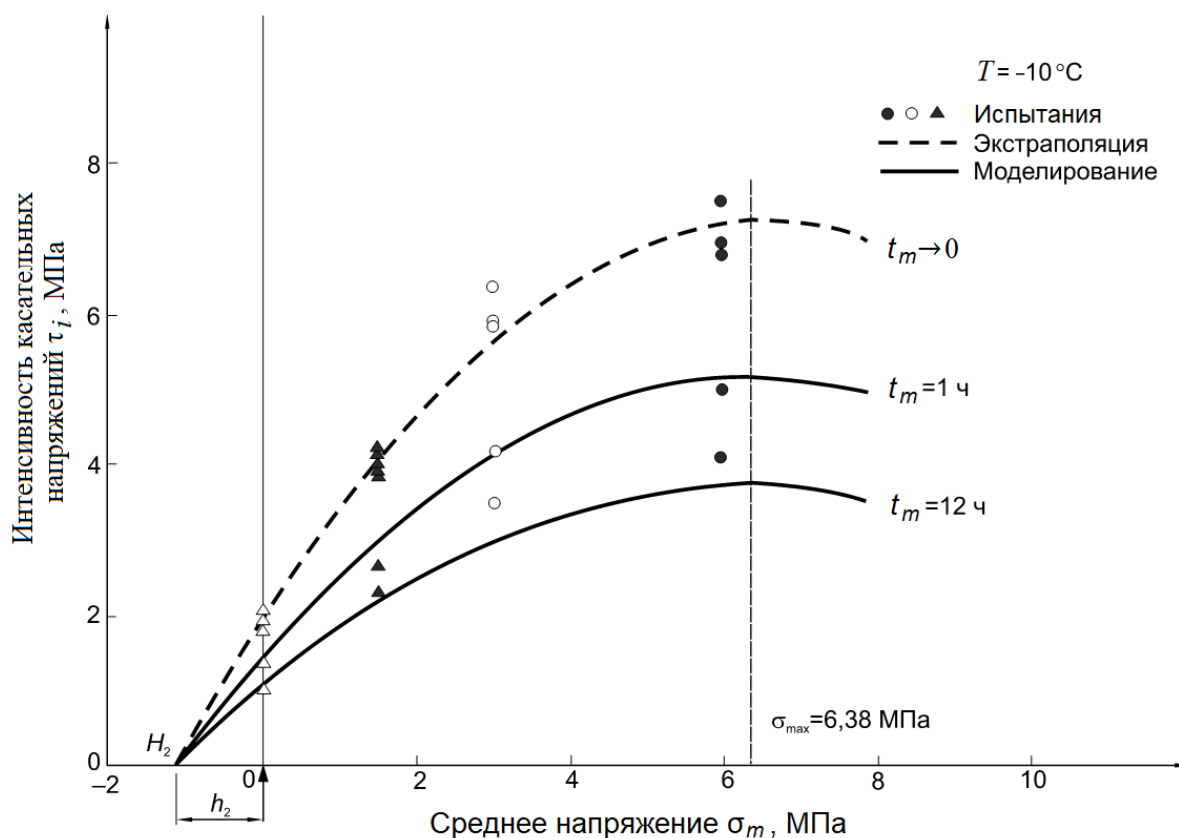


Рис. 7. Сопоставление модельных кривых длительной прочности мерзлой глины при температуре минус 10 °С и лабораторных данных (по [160]). *Обозначения:* τ_i — интенсивность касательных напряжений, характеризующая уровень сдвигового напряжения в грунте при трехосном сжатии; σ_m — среднее напряжение; T — температура; t_m — критический интервал времени с момента приложения нагрузки; $\sigma_{\max}=6,38$ МПа — среднее напряжение, соответствующее максимуму интенсивности касательных напряжений (вершине параболы); H_2 — точка пересечения параболы с горизонтальной осью (осью среднего напряжения σ_m) слева от нуля, соответствующая пределу всестороннего растяжения (предельному сопротивлению разрыву); h_2 — горизонтальная координата точки H_2 (по оси σ_m)

Чжу и др. [153] провели ряд одноосных испытаний мерзлых грунтов разных типов на сжатие и пришли к выводу, что напряженно-деформированное поведение таких грунтов зависит от скорости

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

деформирования и температуры и может быть разделено на 9 категорий. Они предложили эмпирические функции зависимостей между напряжениями и деформациями для каждой из выделенных категорий.

Ли и др. [136, 137], используя результаты трехосных испытаний, предложили модель ползучести мерзлого грунта, которая имеет ясный физический смысл и удобна для вычислений [161]:

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G_M} + \frac{S_{ij}}{2H_M} t + \frac{S_{ij}}{2G_K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_K}{H_K} t\right) \right] \quad (19)$$

при $\varphi(F) \leq 0$;

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G_M} + \frac{S_{ij}}{2H_M} t + \frac{S_{ij}}{2G_K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_K}{H_K} t\right) \right] + \frac{1}{2H_N} \langle \varphi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} t, \quad (20)$$

при $\varphi(F) > 0$,

где e_{ij} – компоненты девиатора тензора деформаций ползучести; S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; G_M, G_K – модули сдвига для упругих элементов реологических тел Максвелла и Кельвина соответственно, зависящие от температуры; H_M, H_K, H_N – коэффициенты вязкости для вязких элементов реологических тел Максвелла, Кельвина и Бингама соответственно, зависящие от температуры; t – время, прошедшее с момента нагружения; F – статическая функция текучести, зависящая от текущего напряженного состояния грунта и определяющая порог (поверхность текучести) перехода мерзлого грунта в вязкопластическое состояние, но не скорость развития деформаций; $\varphi(F)$ – базовая скалярная функция текучести, зависящая от статической функции текучести F и используемая здесь в качестве математического критерия для определения режима деформирования грунта (при $\varphi(F) \leq 0$ вязкопластическое течение отсутствует, при $\varphi(F) > 0$ оно развивается); $\langle \dots \rangle$ – угловые скобки Маколея (означают, что функция равна своему аргументу, если он положителен, и равна нулю, если он отрицателен или

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

равен нулю); $\langle \varphi(F) \rangle$ – динамическая функция вязкопластического течения, характеризующая скорость нарастания деформаций ползучести мерзлого грунта во времени при выполнении условия $\varphi(F) > 0$; Q – функция пластического потенциала; $\{\sigma\}$ – вектор (тензор) напряжений; $\partial Q / \partial \{\sigma\}$ – градиент функции пластического потенциала по напряжениям, определяющий направление пластического течения.

Нин и Чжу [162] разработали упругую определяющую модель для мерзлого песка с учетом повреждаемости. В этой модели модуль упругости изменяется в соответствии с параметром повреждения, рассчитываемым через предложенный параметр замерзания (цементации льдом), который является функцией объемного содержания льда в грунте, предела прочности и объемной деформации.

Модели последнего поколения (2020–2026 гг.) с учетом упрочнения и повреждения

Ши и др. [97] предложили модель ползучести мерзлых грунтов, основанную на одновременном учете упрочнения и повреждения. В ней полная деформация ε в момент времени t представляется в виде следующей суммы:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_h(t) \cdot [1 - D(t)] + \varepsilon_d(t), \quad (21)$$

где ε_e – условно-мгновенная упругая деформация, возникающая в момент приложения нагрузки и не зависящая от времени; $\varepsilon_h(t)$ – деформация упрочнения неповрежденного материала (вязкопластическая деформация, преобладающая на стадии первичной/затухающей ползучести); $D(t)$ – скалярный параметр (переменная) повреждения; $[1 - D(t)]$ – коэффициент, отражающий снижение несущей способности грунта из-за накопления микродефектов; $\varepsilon_d(t)$ – деформация повреждения, интенсивно развивающаяся на стадии третичной/ускоренной ползучести и приводящая к разрушению грунта.

Эта модель была верифицирована с помощью лабораторных испытаний при разных уровнях напряжений. Она с высокой точностью описывает нелинейное поведение мерзлого грунта на стадии

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

прогрессирующей (ускоренной) ползучести, что не представлялось возможным в рамках классических моделей.

Амини и др. [17] для описания термически индуцированной ползучести мерзлых грунтов разработали модель критического состояния с использованием принципов термоупруговязкопластической теории под названием CS-TEVP (Critical State-based Thermo-Elasto-ViscoPlastic constitutive model). В отличие от рассмотренной ранее модели Фиша, она была создана в рамках концепции двух независимых переменных состояния – напряжения твердой фазы и отрицательного порового давления, возникающего вследствие криогенного всасывания. Эти переменные определяют параметры критического напряженного состояния грунта при сдвиге. Модель CS-TEVP была реализована как пользовательская подпрограмма для программных комплексов PLAXIS и ABAQUS.

Хэ и др. [129] экспериментально и теоретически исследовали ползучесть на границе раздела «мерзлый песок – бетон» с учетом содержания льда. Предложенная ими модель учитывает изменение прочности контакта при разном льдосодержании и применяется для расчета длительной несущей способности свайных фундаментов в криолитозоне.

ДРОБНО-ПРОИЗВОДНЫЕ (ФРАКТАЛЬНЫЕ) МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Во второй половине XX века было опубликовано немало работ, касающихся *дробного исчисления* (fractional calculus) – раздела математики, расширяющего классическое дифференциальное и интегральное исчисление за счет введения производных и интегралов нецелого порядка. Отметим, что данное понятие не следует путать с понятиями «фрактальное исчисление» (fractal calculus) и «фрактальные вычисления» (fractal computing), относящимися к другим направлениям математики.

Нет сомнений в том, что дробное исчисление стало важным подходом к решению разнообразных задач математики, других наук и техники. Среди последних достижений в этом направлении доминируют современные прикладные аспекты в сферах физики, обработки сигналов, механики жидкости, описания вязкоупругого поведения материалов,

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

математической биологии, электрохимии. Основные определения и примеры таких прикладных аспектов приведены в работах [163, 164].

Дробно-производные в математическом смысле (фрактальные в физическом смысле) модели представляют собой новую разновидность реологических моделей, в основе которых лежит представление о структурно-неоднородном скелете мерзлого грунта с фрактальной микроструктурой (характеризующейся сложным многоуровневым соразмерно повторяющимся строением элементов). Целенаправленный учет изменяющейся размерности такой структуры позволяет адекватно математически описать развивающиеся во времени деформации, а учет фрактальных свойств контактных зон обеспечивает возможность точного прогнозирования параметров ползучести и длительной прочности [165].

Напомним, что ввиду значительного объема и междисциплинарного характера настоящего обзора буквенные обозначения в приведенных далее уравнениях и на рисунках не являются полностью «сквозными» по отношению к предыдущему разделу и согласованы между собой в пределах данного раздела отдельно.

Исторически применение аппарата дробного исчисления связывают с определением дробного интеграла Римана – Лиувилля порядка β (Riemann-Liouville fractional integral of order β):

$${}_a D_x^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \quad (22)$$

где ${}_a D_x^{-\beta}$ (используется также обозначение ${}_a J_x^{\beta}$) – оператор левостороннего дробного интегрирования Римана – Лиувилля порядка β по переменной x с нижним пределом a (отрицательный знак перед индексом β традиционно указывает на операцию интегрирования в отличие от положительного знака для производной); β – порядок дробного интегрирования ($\beta > 0$, действительное число); a – нижний (фиксированный) предел интегрирования (начало интервала, в котором определена функция); x – верхний (переменный) предел интегрирования и аргумент результирующей функции; τ – переменная этого интегрирования (немая переменная); $f(x)$ – исходная интегрируемая функция действительного аргумента x , заданная в интервале $[a, x]$; $f(\tau)$ – та же функция, но с переменной интегрирования τ в качестве аргумента; $\Gamma(\beta)$ – классическая гамма-функция Эйлера с аргументом β ; $1/\Gamma(\beta)$ – нормирующий множитель.

При $a = 0$ формула (22) представляет собой классическое определение дробного интеграла Римана, а при $a = -\infty$ – определение Лиувилля. Интеграл этого типа был получен на основе теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных, где он известен как преобразование Эйлера первого рода.

Действия с производными и интегралами произвольных вещественных или комплексных порядков описаны в математике [164]. При использовании определения Римана – Лиувилля дробный интеграл порядка β записывается в следующем виде [166]:

$$\begin{aligned} \frac{d^{-\beta} f(t)}{dt^{-\beta}} &= {}_{t_0}D_t^{-\beta} f(t) = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

где t – текущее время; $f(t)$ – исходная интегрируемая функция времени t ; ${}_{t_0}D_t^{-\beta}$ – оператор левостороннего дробного интегрирования Римана – Лиувилля порядка β по времени t с начальным моментом отсчета t_0 .

Гамма-функция Эйлера определяется по формуле:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\beta-1} du, \quad (24)$$

где u – переменная этого интегрирования (немая переменная); e – основание натурального логарифма.

Соответствующие дробные производные определяют на основе свойства композиции (последовательного применения) дифференциальных операторов Римана – Лиувилля. Путем взятия классической производной целого порядка n от дробного интеграла порядка $(n-\beta)$ получают левостороннюю дробную производную порядка β :

$$\begin{aligned} \frac{d^{\beta} f(t)}{dt^{\beta}} &= {}_{t_0}D_t^{\beta} f(t) = \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[{}_{t_0}D_t^{-(n-\beta)} f(t) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

где $f(t)$ – исходная дифференцируемая функция времени t ; β – порядок дробного дифференцирования (для нецелых порядков выполняется округление значения β до ближайшего большего целого в соответствии с неравенством $(n-1) \leq \beta < n$); n – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $n \geq \beta$; ${}_t D_t^\beta$ – оператор левостороннего дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка β по времени t с начальным моментом отсчета t_0 (знак «плюс» перед β указывает на операцию дифференцирования в отличие от интегрирования); ${}_t D_t^{-(n-\beta)}$ – оператор левостороннего дробного интегрирования Римана – Лиувилля порядка $(n-\beta)$ по времени t с начальным моментом отсчета t_0 , определяемый согласно формуле (23).

В терминах интегральной свертки операция дробного интегрирования (при начальном моменте отсчета $t_0=0$) может быть представлена в следующем компактном виде:

$$D_t^{-\beta} f(t) = \varphi_\beta(t) * f(t), \quad (26)$$

где $D_t^{-\beta}$ – оператор левостороннего дробного интегрирования Римана – Лиувилля порядка β по времени t с началом отсчета в момент времени $t_0=0$; $f(t)$ – исходная интегрируемая функция времени t ; $*$ – знак операции временной интегральной свертки; $\varphi_\beta(t)$ – степенное ядро дробного оператора интегрирования, определяемое в виде кусочно-заданной временной функции:

$$\varphi_\beta(t) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (27)$$

Для решения дифференциальных и интегральных уравнений в математике и в технических науках широко используется преобразование Лапласа. Оно представляет собой линейный оператор, который переводит функцию $f(t)$ с действительным аргументом t ($t \geq 0$) в следующую функцию:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (28)$$

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

где $F(s)$ – изображение (трансформанта) Лапласа исходной функции $f(t)$ в комплексной области; s – комплексная (состоящая из действительной и мнимой части) переменная.

Применяя преобразование Лапласа (28) к степенному ядру дробного оператора (27), можно получить формулу:

$$L\{\varphi_{\beta}(t)\} = L\left\{\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right\} = s^{-\beta}, \quad (29)$$

где L – символ (оператор) преобразования Лапласа; $s^{-\beta}$ – изображение ядра $\varphi_{\beta}(t)$ дробного оператора интегрирования $D_t^{-\beta}$ в комплексной области по Лапласу.

При нулевых начальных условиях ($t_0=0, f(0)=0$) преобразование Лапласа от дробного интеграла (23) и дробной производной (25) Римана – Лиувилля во временной области ($t>0$) принимает следующий вид:

$$L[D_t^{-\beta} f(t)] = s^{-\beta} F(s); \quad (30)$$

$$L[D_t^{\beta} f(t)] = s^{\beta} F(s), \quad (31)$$

где $s^{-\beta}, s^{\beta}$ – изображения ядра дробного оператора интегрирования $D_t^{-\beta}$ и ядра дробного оператора дифференцирования D_t^{β} в комплексной области по Лапласу соответственно.

Применительно к условиям ползучести можно с помощью формулы (23) связать развивающуюся деформацию с функцией механического напряжения. Чтобы описать деформацию в общем виде, к уравнению (23) применяется линейный оператор преобразования Лапласа для перехода к изображениям функций в комплексной области, а затем выполняется обратное преобразование для возвращения во временную область. Однако в частном случае, когда приложенное напряжение σ постоянно, интегрирование можно выполнить напрямую во временной области с получением следующего реологического уравнения:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta_{\beta}} \frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}, \quad (32)$$

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

где $\varepsilon(t)$ — деформация ползучести в момент времени t ; β — порядок дробного оператора; η_β — коэффициент вязкости дробного порядка; $\Gamma(1+\beta)$ — гамма-функция Эйлера с аргументом $(1+\beta)$.

Из уравнения (32) видно, что порядок дробного оператора является ключевым параметром, управляющим скоростью развития деформации ползучести. Нулевой порядок оператора ($\beta=0$) дает закон Гука для упругого тела, а первый порядок ($\beta=1$) — закон Ньютона для вязкой жидкости. Малая величина порядка ($0<\beta<1$) обуславливает малую деформацию ползучести, низкую скорость ее развития и длительный период установившейся (вторичной) ползучести. Большое значение порядка ($\beta>1$) определяет значительную деформацию ползучести, более высокую скорость ее накопления и короткую стадию установившейся ползучести. Путем подбора порядка оператора определяющие уравнения, описывающие ползучесть, могут быть адаптированы для адекватного моделирования разных стадий ползучести при различных уровнях приложенных постоянных напряжений.

Дробное исчисление является очень полезным инструментом для построения определяющих моделей ползучести, поскольку оно имеет преимущества в объяснении процесса накопления внутренних напряжений, способствует уменьшению параметров в определяющей модели и отражает нелинейное поведение материала [120, 121, 167, 168]. В последнее время сделаны попытки использовать этот инструмент для разработки определяющих уравнений, включающих эффекты вязкоупругости и вязкопластичности [169]. Применение определяющих уравнений, полученных на основе дробного исчисления, перспективно тем, что для описания деформаций ползучести требуется всего несколько параметров [170].

С учетом того что грунт является сложным материалом, который по своим свойствам занимает промежуточное положение между идеально упругим телом Гука и жидкостью, подчиняющейся закону вязкости Ньютона, общую зависимость между текущим напряжением в грунте $\sigma(t)$ и текущей деформацией $\varepsilon(t)$ в момент времени t с начала приложения нагрузки можно записать так:

$$\sigma(t) = G \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}, \quad (33)$$

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

где β – порядок дробного оператора, изменяющийся от 0 до 1; G – модуль сдвига дробного порядка, отражающий дробную вязкость и являющийся константой материала.

Очевидно, что порядок β напрямую связан с реологическими свойствами материала, так как согласно уравнению (33) при $\beta=0$ материал ведет себя подобно идеально упругому телу (рис. 8, а, б), с увеличением β он приобретает вязкоупругие свойства, а при $\beta=1$ становится подобным ньютоновской вязкой жидкости (рис. 8, в, г).

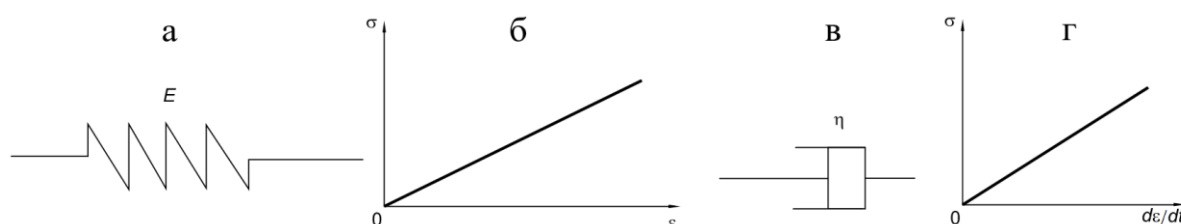


Рис. 8. Классические реологические модели: а – идеально упругий элемент Гука (пружина) с модулем упругости E ; б – график линейной зависимости напряжения σ от деформации ε (закон Гука); в – идеально вязкий элемент Ньютона (поршень) с коэффициентом вязкости η ; г – график зависимости напряжения σ от скорости развития деформации $d\varepsilon/dt$ (закон Ньютона)

Смит и де Врис [171] предложили модель, которая является промежуточной между показанными на рисунках 8, в, г. В этой модели порядок β может принимать значения не только 0 или 1, но и в диапазоне между этими двумя числами (рис. 9):

$$\sigma(t) = E\theta^\beta \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}, \quad (34)$$

где β – порядок дробного оператора, определяющий меру вязкоупругого поведения материала ($0 \leq \beta \leq 1$); E – модуль упругости (постоянная для конкретного материала); θ – характерное время релаксации (постоянная для материала); d^β/dt^β – оператор левостороннего дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка β .

Если порядок β рассматривать как постоянную величину во время нагружения, то это означает неизменность свойств материала и постоянство значения $E\theta^\beta$. Поэтому формулу (34) можно упростить,

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

записав произведение $E\theta^\beta$ в виде коэффициента вязкости дробного порядка $\eta_\beta = E\theta^\beta$:

$$\sigma(t) = \eta_\beta \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}. \quad (35)$$

Отметим, что некоторые исследователи вместо η_β пишут в этой упрощенной формуле обозначение E , совпадающее с обозначением модуля упругости, что является ошибкой. Чтобы ее избежать, лучше использовать уравнение (34).

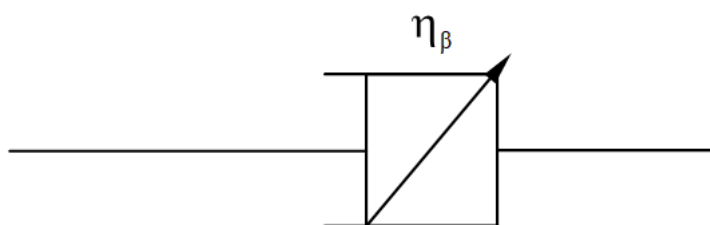


Рис. 9. Условное графическое изображение вязкоупругого элемента дробного порядка (элемента Скотта – Блэра, также известного в реологии как элемент Абеля) по модели Смита и де Вриса [171]. *Обозначение:* η_β – коэффициент вязкости дробного порядка ($\eta_\beta = E\theta^\beta$, где E – модуль упругости материала; θ – время релаксации материала в соответствии с формулой (34))

Развитие дробно-производных (фрактальных) моделей ползучести в работах 2020–2026 гг.

В последние годы использование дробного исчисления активно развивается в работах китайских и российских исследователей.

Например, Чжоу и др. [120, 121] предложили вязкопластическую модель Бингама – Абеля, объединяющую дробно-производный элемент Абеля с пластическим элементом Сен-Венана из классической модели Бингама. Эта модель описывает все стадии ползучести (включая третью стадию – ускоренной ползучести) при минимальном числе параметров (3–4 против 7–10 в классических моделях).

Существенным преимуществом фрактальных (дробно-производных) моделей последнего поколения является их физическая интерпретируемость: параметр β связан с фрактальной размерностью

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

микроструктуры мерзлого грунта и может быть независимо оценен по данным компьютерной рентгеновской томографии. Это позволяет калибровать модель не путем подгонки к одной кривой ползучести, а на основе независимых структурных измерений.

МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ (МНОГОПОЛЕВОЕ) МОДЕЛИРОВАНИЕ: СВЯЗАННЫЕ ТНМ- И ТНМС-МОДЕЛИ

Современный этап применения численных методов в механике мерзлых грунтов характеризуется переходом от чисто теплофизических задач к полностью связанным мультифизическим (многополевым) моделям. Ли и Инь в своем обзоре [31] проанализировали более 360 публикаций и показали, что доминирующим направлением последних лет является термогидромеханическое моделирование с учетом миграции влаги, образования ледяных линз и эволюции порового пространства.

Связанная многополевая термогидромеханическая (ТНМ-) модель включает три совместно решаемых уравнения сохранения – уравнение сохранения энергии для теплового поля, уравнение сохранения массы воды и льда для гидравлического поля и уравнение равновесия для механического поля. Замыкающей зависимостью для данной системы служит кривая характеристик замерзания грунта (Soil Freezing Characteristic Curve, SFCC), связывающая содержание незамерзшей воды с температурой.

После 2020 года были предложены новые модели SFCC, учитывающие зависимость содержания незамерзшей воды от общего влагосодержания и истории замерзания-оттаивания [172, 173]. Ван и др. [173] опубликовали сравнительный анализ девяти классов моделей SFCC и показали, что современные аналитические модели на основе кривой удерживания влаги грунтом (Soil Water Characteristic Curve, SWCC) точнее предсказывают пучение, чем традиционная эмпирическая степенная модель Андерсона – Тайса.

Лю и др. [30] разработали связанную ТНМ-модель ненасыщенного мерзлого грунта на основе модифицированной модели «Кэм-клэй» (Cam-Clay) с учетом морозного пучения и осадки оттаивания. Верификация полученной модели путем сопоставления результатов численных расчетов с экспериментальными данными подтвердила ее достоверность.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Для решения специфических задач (прогнозирования поведения засоленных мерзлых грунтов прибрежных зон Арктики, учета влияния антигололедных реагентов на основания автодорог, моделирования воздействий природных рассолов в криопэгах и др.) создаются связанные многополевые термогидромеханикохимические (ТНМС-) модели.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

С 2020 года наблюдается экспоненциальный рост публикаций по применению машинного обучения (МО) и глубоких нейронных сетей для решения задач механики и теплофизики мерзлых грунтов. Мемиш и др. в своем систематическом обзоре [18] проанализировали более 150 работ и выделили три класса задач, для которых эффективны МО-подходы.

1. Прогнозирование глубины протаивания (мощности активного слоя). Использование модели на основе метода «случайный лес» с такими входными данными, как снимки со спутника Sentinel-2, цифровая модель рельефа и результаты климатического реанализа, позволило спрогнозировать мощность сезонно-талого слоя на многих участках криолитозоны на севере Канады. При этом среднеквадратическое отклонение было небольшим, составив около 0,15 м, а коэффициент детерминации R^2 был равен 0,63 [174]. Системы глубокого обучения, особенно сверточные нейронные сети, дали возможность выявить термокарстовые формы рельефа на основе данных воздушного лазерного сканирования высокого разрешения и мультиспектральной съемки с точностью более 92% [175]. При пространственном выделении мерзлых и талых зон в субарктическом регионе на основе бинарной классификации грунтов (мерзлые/талые) почти 90%-ную точность показал метод опорных векторов, использующий радиальную базисную функцию [176].

2. Прогноз температуры грунта и фазового состояния.

Ансамблевые методы машинного обучения на данных климатического реанализа (второго поколения реанализа для моделирования и обработки данных NASA, MERRA-2) и данных полевых наблюдений на Аляске, позволили заблаговременно (за 7, 30 и 90 дней) прогнозировать состояние грунта «мерзлый/талый» на разной глубине в пределах сезонно-талого слоя [177].

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

3. *Прогноз механических свойств мерзлых грунтов.* Сунь и др. [178] предложили гибридную модель PCA-ANN на основе метода главных компонент (PCA) и искусственной нейронной сети (ANN) для прогнозирования прочности грунтов сезонно-мерзлого слоя при статической нагрузке. Эта модель была разработана с учетом следующих шести факторов: влажности, степени уплотнения, всестороннего давления, температуры замерзания, числа циклов промерзания-оттаивания и продолжительности оттаивания. По точности прогнозирования она превзошла метод опорных векторов и метод «случайный лес».

Особое место занимают физически информированные нейронные сети, в которых классическое уравнение теплопроводности и уравнение Клапейрона для фазового перехода включаются непосредственно в функцию потерь (критерий оптимизации) сети. Это обеспечивает физическую корректность прогнозов даже при ограниченном объеме обучающей выборки. Модели на основе физически информированных нейронных сетей, работы по которым были опубликованы в 2023–2025 годах, показали снижение среднеквадратического отклонения прогноза температуры грунта примерно до 0,13 м (с 0,21 м в случае эмпирической базовой модели) при коэффициенте детерминации $R^2 > 0,90$ (с 0,68 в случае применения линейной регрессии).

Несмотря на эти достижения, применение машинного обучения в инженерной практике сдерживается рядом проблем, в том числе ограниченностью открытых баз данных по мерзлым грунтам, непрозрачностью и сложностью интерпретации хода работы моделей, необходимостью валидации моделей в соответствии с нормативными документами.

В РФ работы по применению МО-подхода к мерзлым грунтам ведутся в МГУ, МГСУ, СПбГУ, Институте мерзлотоведения СО РАН, но систематизированных результатов уровня международных обзоров пока не опубликовано.

МНОГОУРОВНЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ГИБРИДНЫЙ МЕТОД МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (MPM–DEM)

Юй и др. [19] предложили подход к моделированию мерзлых грунтов на двух уровнях. *На микроуровне* используется метод дискретных

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

элементов (DEM) для описания контактных взаимодействий «частица – лед – частица» с учетом разрушения льдоцементационных связей. DEM-модель на каждом шаге расчета генерирует определяющее уравнение, связывающее напряжения и деформации с учетом текущего льдосодержания, температуры и всестороннего давления. Это уравнение передается в вычислительный модуль метода материальных точек (MPM-решатель). *На макроуровне* применяется метод материальных точек (MPM) для решения уравнений связанных термогидромеханических (ТНМ-) моделей в инженерном масштабе.

Преимущества гибридного подхода MPM-DEM:

- 1) отсутствие необходимости в эмпирических допущениях относительно вида поверхности текучести;
- 2) автоматизированное описание упрочнения-разупрочнения через эволюцию контактных связей;
- 3) возможность моделирования больших деформаций (при промерзании, ползучести, разжижении при оттаивании) без проблем, возникающих из-за искажения сетки.

Ограничения подхода MPM-DEM:

- 1) значительные вычислительные затраты: для расчетов требуется параллельная обработка с помощью графических процессоров (GPU) либо кластерных вычислительных систем;
- 2) необходимость в калибровке параметров контактного взаимодействия частиц на основе данных микрокомпьютерной томографии (микро-КТ) или прямых виртуальных DEM-испытаний;
- 3) недостаточная апробация (верификация) в инженерной практике на данный момент.

СЕТОЧНЫЕ, БЕССЕТОЧНЫЕ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ГЕОКРИОЛОГИИ

Помимо классических методов (МКР, МКЭ) для решения задач промерзания применяются современные численные методы.

1. *Метод сглаженных частиц (SPH)* позволяет описывать большие деформации мерзлого грунта при оттаивании без перестраивания сетки.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

2. *Методы перидинамики*, особенно подход на основе дифференциального оператора перидинамики (Peridynamic Differential Operator, PDDO) с ядром на основе парных связей (bond-based), успешно применяются при моделировании морозного растрескивания грунтов и образования ледяных линз. Например, Шэн и др. [179] смоделировали картину растрескивания грунта при промерзании в двумерной постановке, которая совпала с полученной при эксперименте.

3. *Метод конечных объемов* (Finite Volume Method, FVM) лежит в основе программного комплекса OpenFOAM и применяется в некоторых специализированных программах для моделирования тепловых процессов в грунтах. Он обладает преимуществами при моделировании конвективного теплопереноса в крупнообломочных отложениях.

4. *Метод изогеометрического анализа* (Isogeometric Analysis, IGA) основан на базисных функциях неоднородных рациональных В-сплайнов (non-uniform rational B-splines, NURBS), применяемых в системах автоматизированного проектирования (CAD). Он обеспечивает высокоточное описание геометрии таких инженерных объектов, как трубопроводы, скважины и термостабилизаторы, что позволяет корректно рассчитывать интенсивный теплообмен и фазовые переходы на границе их контакта с промерзающими или оттаивающими грунтами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование процессов промерзания и оттаивания грунтов прошло путь от одномерной задачи Стефана с фазовым переходом до полностью связанных ТНМС-моделей, развитие которых сегодня тесно связано с использованием методов машинного обучения и многоуровневого подхода.

Современное состояние этой сферы знаний (по данным на 2026 год) можно охарактеризовать следующими тезисами.

1. Доминирующим направлением последних пяти лет стали связанные ТНМ- и ТНМС-модели, учитывающие миграцию влаги, образование ледяных линз и эволюцию микроструктуры грунта. Полноразмерные ТНМС-модели реализованы в программных комплексах COMSOL и OpenGeoSys. ТНМ-задачи успешно решаются в геотехническом пакете PLAXIS (в том числе с помощью модели FUS) и в специализированных программах (например, во frozen-ground-fem).

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

2. Среди определяющих моделей мерзлых грунтов наиболее перспективны модели критического состояния в термоупруговязкопластической постановке [17] и модели с явным учетом упрочнения и повреждения [97]. В то же время благодаря минимальному числу параметров остаются привлекательными и дробно-производные (фрактальные) модели.

3. Для прогноза мощности слоя сезонного оттаивания, температурного режима и прочности мерзлых грунтов успешно применяются методы машинного обучения и физически информированные нейронные сети. Однако внедрение этих подходов в инженерную практику требует разработки нормативно-методической базы.

4. Возможности для описания мерзлых грунтов «от микроструктур до оснований сооружений» открывает многоуровневое моделирование с помощью гибридного подхода MPM-DEM. Однако его использование в инженерной практике на сегодняшний день является ограниченным из-за больших вычислительных затрат.

5. Российские программы и пакеты, разработанные в СО РАН, МГУ, ТГАСУ, ЦНИИС и в компании НТЦ «Симмэйкерс» (программный комплекс FROST 3D), сохраняют конкурентоспособность в своих нишах, особенно в области расчетов в соответствии с нормативными документами. Развитие отечественного программного обеспечения для моделирования поведения мерзлых грунтов является стратегической задачей в условиях импортозамещения.

Перспективные направления дальнейших исследований в этой области:

- интеграция ТНМС-моделей с климатическими сценариями Межправительственной группы экспертов по изменению климата (МГЭИК, IPCC) для прогноза устойчивости инфраструктуры в Арктике;
- разработка гибридных физико-статистических моделей;
- создание открытых баз данных по свойствам мерзлых грунтов;
- стандартизация параметров для современных моделей (FUS, CS-TEVP, дробно-производных моделей и др.) для их последующего включения в национальные нормативные документы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубина М.М., Коновалов В.В., Цибульский В.Р., Черняков Ю.А. Инженерно-геологический мониторинг промыслов Ямала. Том 1. Моделирование термомеханического взаимодействия инженерных сооружений с грунтами. Новосибирск: Наука, 1996. 136 с.
2. Дубина М.М., Красовицкий Б.А. Теплообмен и механическое взаимодействие трубопроводов и скважин с грунтами. Новосибирск: Наука, 1983. 134 с.
3. Дубина М.М., Красовицкий Б.А. Лозовский А.С. Попов Ф.С. Тепловое и механическое взаимодействие инженерных сооружений с мерзлыми грунтами. Новосибирск: Наука, 1977. 144 с.
4. Дубина М.М., Тесленко Д.К. Инструменты для расчетов термомеханического поведения геотехнических систем // Материалы 9-й Научно-технической конференции «Актуальные проблемы механики, прочности и теплопроводности при низких температурах. Моделирование замораживания грунтов искусственным холодом». СПб.: СПбГУНиПТ, 2003. С. 102–105.
5. Дубина М.М., Черняков Ю.А. Моделирование и расчет термопластического состояния мерзлых пород. Новосибирск: Наука, 1991. 140 с.
6. Кудрявцев С.А., Сахаров И.И., Парамонов В.Н. Промерзание и оттаивание грунтов (практические примеры и конечноэлементные расчеты). СПб.: ГК «Геореконструкция», 2014. 247 с.
7. Кудрявцев С.А., Сахаров И.И., Парамонов В.Н., Шашкин А.Г. Использование метода конечных элементов в решении задач геотехники: учеб. пособие. Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2014. 162 с.
8. Парамонов М.В. Напряженно-деформированное состояние системы «Основание – сооружение» при неоднородном промерзании грунтов: автореф. дис. ... канд. тех. наук. СПб., 2013. 22 с.
9. Протодяконова Н.А. Математическое моделирование деформаций грунта при оттаивании с учетом фильтрационной консолидации: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Якутск, 2008. 128 с.
10. Сахаров И.И., Парамонов В.Н., Шашкин К.Г. Решение трехмерной температурно-влажностной задачи промерзания и пучения на

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

примере малоэтажного кирпичного здания // Развитие городов и геотехническое строительство. 2011. № 2. С. 1–12.

11. Фадеев А.Б., Сахаров И.И., Репина П.И. Численное моделирование процессов промерзания и пучения в системе «фундамент – основание» // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1994. № 5. С. 6–9.
12. He M., Feng X., Li N. Modeling of coupled heat-moisture transfer and deformation behavior of frozen soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2018. Vol. 55. № 3. P. 153–161.
13. Хэ М., Фэн С., Ли Н. He M., Feng X., Li N. Моделирование связанных процессов тепловлагодпереноса и деформирования мерзлого грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2018. № 3. С. 7–13.
14. Lai Y.M., Pei W.S., Zhang M.Y., Zhou J.Z. Study on theory model of hydro-thermal-mechanical interaction process in saturated freezing silty soil // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 78. № 5. P. 805–819.
15. Li H.S., Liu Z.L., Liang C.J. Mathematical model for coupled moisture heat and stress field and numerical simulation of frozen soil // Acta Mechanica Sinica. 2001. Vol. 33. № 5. P. 621–629 (in Chinese).
16. Wang S., Qi J., Yin Z., Zhang J., Ma W. A simple rheological element-based creep model for frozen soils // Cold Regions Science and Technology. 2014. Vol. 106-107. P. 47–54.
17. Amini D., Maghoul P., Holländer H. A critical state-based thermo-elasto-viscoplastic constitutive model for thermal creep deformation of frozen soils // Acta Geotechnica. 2024. Vol. 19. P. 2955–2973. DOI: 10.1007/s11440-023-02058-1.
18. Memiş M.A., Keskin I., Demir S., Memiş Ş.U. Machine learning-based prediction of permafrost degradation and its implications on geotechnical infrastructure: a comprehensive review // AI in Civil Engineering. 2025. Vol. 4. № 1. Article 28. URL: <https://doi.org/10.1007/s43503-025-00080-8>.
19. Yu J., Zhao J., Liang W., Zhao S. Multiscale modeling of coupled thermo-hydro-mechanical behavior in ice-bonded granular media subject to freeze-thaw cycles // Computers and Geotechnics. 2024. Vol. 171. Article 106349. DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106349.
20. Буда́к Б.М., Васи́льев Ф.П., Успенский А.Б. Разностный метод решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

- методы в газовой динамике: сборник. М.: Изд-во МГУ, 1965. Т. 4. С. 139–183.
21. Левкович А.И. Расчет прогноза мерзлотных условий при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений с помощью электронных вычислительных машин // Сб. трудов института «Фундаментпроект». 1967. Т. 7.
 22. Левкович А.И. Инженерно-геологические изыскания для строительства на вечномёрзлых грунтах. Л.: Стройиздат, 1974. 144 с.
 23. Павлов А.Р. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса и температурных деформаций в строительных материалах при фазовых переходах. Новосибирск: Наука, 2001. 276 с.
 24. Павлов Б.Н. Численное моделирование тепломассопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Якутск, 1999. 120 с.
 25. Палькин Ю.С. Применение АВМ и ЭЦВМ в исследованиях теплового состояния оснований зданий // Записки Забайкальского филиала Географического общества СССР. Выпуск 44. Проблемы строительства в условиях Забайкалья. Чита, 1970. С. 3–6.
 26. Кудрявцев С.А. Расчеты процесса промерзания и оттаивания по программе Termoground // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2004. № 8 (4). С. 83–97.
 27. Кудрявцев С.А. Расчетно-теоретическое обоснование проектирования и строительства сооружений в условиях промерзающих пучинистых грунтов: дисс. ... док. тех. наук. СПб., 2004. 344 с.
 28. Кудрявцев С.А. Геотехническое моделирование процесса промерзания и оттаивания морозоопасных грунтов. СПб.: АСВ, 2004. 36 с.
 29. Кудрявцев С.А. Расчетно-теоретическое обоснование проектирования и строительства сооружений в условиях промерзающих пучинистых грунтов. СПб.: ПГУПС, 2004. 344 с.
 30. Liu Q., Cai G., Zhou C., Yang R. Thermo-hydro-mechanical coupled model of unsaturated frozen soil considering frost heave and thaw settlement // Cold Regions Science and Technology. 2023. Vol. 217. № 1. Article 104026. DOI: 10.1016/j.coldregions.2023.104026.
 31. Li K.Q., Yin Z.Y. State of the art of coupled thermo-hydro-mechanical-chemical modelling for frozen soils // Archives of Computational Methods

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

- in Engineering. 2025. Vol. 32. № 2. P. 1039–1096. URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-024-10164-w>.
32. Wang Z., Xie K., Zhang Y., Li B.-X. Thawing-consolidation performances of frozen soil in segregated ice-rich regions using thermo-hydro-mechanical coupled model // Computers and Geotechnics. 2024. Vol. 171. Article 106379.
 33. Zhu M., Michalowski R.L. Simulation of heat transfer in freezing soils using ABAQUS // Proceedngs of the ABAQUS Users' Conference. 2005. P. 1–7.
 34. Савельев А.А., Мухарамова С.С., Пилюгин А.Г., Чижикова Н.А. Геостатистический анализ данных в экологии и природопользовании (с применением пакета R): учебное пособие. Казань: Изд-во Казанского университета, 2012. 120 с.
 35. Aukenthaler M., Brinkgreve R., Haxaire A. Evaluation and application of a constitutive model for frozen and unfrozen soil // Proceedings of the 69th Canadian Geotechnical Conference (GeoVancouver 2016). Vancouver, 2016. P. 1–8.
 36. Ghoreishian Amiri S.A., Grimstad G., Aukenthaler M., Panagoulas S., Brinkgreve R.B.J., Haxaire A. Frozen and unfrozen soil model. Delft : Plaxis Company, 2016. 48 p.
 37. Korshunov A.A., Churkin S.V., Nevzorov A.L. Calibration of PLAXIS Frozen/Unfrozen Soil Model according to results of laboratory tests and in-situ monitoring // Transportation Soil Engineering in Cold Regions. 2020. Vol. 2. P. 105–120. DOI: 10.1007/978-981-15-0454-9_12.
 38. Pekinasova A., Hayley J.L., Karchewski B. Benchmark validation of a new numerical tool for settlement prediction of freezing and thawing ground in cold regions // Proceedings of the 77th Canadian Geotechnical Conference. Montréal, 2024.
 39. Сливец К.В., Колмогорова С.С., Коваленко И.А. Параметры мерзлых грунтов при численном моделировании теплофизических задач // Известия Петербургского университета путей сообщения. СПб.: ПГУПС, 2022. Т. 19. № 2. С. 359–366. DOI: 10.20295/1815-588X-20222-359-366.
 40. Pekinasova A., Hayley J.L., Karchewski B. Frozen-ground-fem: a practical and open Python 3 package for THM coupled modelling of soils in cold regions // SoftwareX. 2025. Vol. 31. DOI: 10.1016/j.softx.2025.102280.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

41. Кудрявцев В.А., Меламед В.Т. Формула расчета глубины сезонного промерзания грунтов (в случае неравных теплофизических характеристик талого и мерзлого грунтов // Мерзлотные исследования. Изд-во МГУ, 1963. Т. 3. С. 3–9.
42. Зарецкий Ю.К. К расчету осадок оттаивания грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1968. № 3. С. 10–12.
43. Li K.-Q., Yin Z.-Y., Zhang N., Liu H.-C. Physics-informed neural networks for solving steady-state temperature field in artificial ground freezing // Canadian Geotechnical Journal. 2025. Vol. 62. P. 1–17. DOI: 10.1139/cgj-2024-0650.
44. Вялов С.С. Реология мерзлых грунтов. М.: Стройиздат, 2000. 464 с.
45. Зарецкий Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений. М.: Стройиздат, 1988. 352 с.
46. Bragg R.A., Andersland O.B. Strain rate, temperature, and sample size effects on compression and tensile properties of frozen sand // Eng. Geol. 1981. Vol. 18. P. 35–46.
47. Chamberlain E., Groves C., Perham R. The mechanical behavior of frozen earth materials under high pressure triaxial test conditions // J. Geotech. 1972. Vol. 22. № 3. P. 469–483.
48. De Gennaro V., Pereira J.M. A viscoplastic constitutive model for unsaturated geomaterials // Comput. Geotech. 2013. Vol. 54. № 10. P. 143–151.
49. Fish A.M. Creep and yield model ice under combined stress: special report 91-31. USA Cold Regions and Engineering Laboratory, 1991.
50. Fish A.M. Three-dimensional viscoplastic flow model of polycrystalline ice // Proceedings of the 3rd International Conference on Ice Technology, 11–13 August 1992, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. Southampton & Boston, USA: Computational Mechanics Publications, 1992. P. 193–207.
51. Fish A.M. Creep and strength of frozen soil under triaxial compression: Special Report № CRREL-SR-94-32. Hanover, NH: Cold Regions Research And Engineering Lab, 1994. 19 p.
52. Fish A.M. Strength of frozen soil under a combined stress state // Proceedings of the 6th International Symposium on Ground Freezing. Beijing, China, 1991. Vol. 1. P. 135–145.
53. Hashiguchi K. Generalized plastic flow rule // Int. J. Plast. 2005. Vol. 21. P. 321–351.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

54. Hashiguchi K., Tsutsumi S. Gradient plasticity with the tangential subloading surface model and the prediction of shear band thickness of granular materials // *Int. J. Plast.* 2007. Vol. 23. P. 767–797.
55. Lai Y.M., Long J., Chang X.X. Yield criterion and elasto-plastic damage constitutive model for frozen sandy soil // *Int. J. Plast.* 2009. Vol. 25. P. 1177–1205.
56. Painter S.L., Karra S. Constitutive model for unfrozen water content in subfreezing unsaturated soils // *Vadose Zone J.* 2014. Vol. 13. № 4. P. 1–8.
57. Yang Y., Lai Y., Dong Y., Li S. The strength criterion and elastoplastic constitutive model of frozen soil under high confining pressures // *Cold Regions Science and Technology.* 2010. Vol. 60. № 2. P. 154–160.
58. Yang Y., Lai Y., Li S., Dong Y. Experimental study of deformation failure and energy properties of frozen silt under triaxial compression // *Rock and Soil Mechanics.* 2010. Vol. 31. № 11. P. 3505–3510.
59. Yang Y.G., Lai Y.M., Chang X.X. Laboratory and theoretical investigations on the deformation and strength behaviors of artificial frozen soil // *Cold Reg. Sci. Tech.* 2010. Vol. 64. P. 39–45.
60. Yang Y.G., Lai Y.M., Chang X.X. Experimental and theoretical studies on the creep behavior of warm ice-rich frozen sand // *Cold Regions Science and Technology.* 2010. Vol. 63. P. 61–67.
61. Zhu Z., Kang G., Ma Y., Xie Q., Zhang D., Ning J. Temperature damage and constitutive model of frozen soil under dynamic loading // *Mechanics of Materials.* 2016. Vol. 102. P. 108–116. DOI: 10.1016/j.mechmat.2016.08.009.
62. Zhang S., Lai Y., Sun Z., Gao Z. Volumetric strain and strength behavior of frozen soils under confinement // *Cold Regions Science Technol.* 2007. Vol. 47. P. 263–270.
63. Li K.Q., Yin Y., Qi J.L., Liu Y. State-of-the-art constitutive modelling of frozen soils // *Archives of Computational Methods in Engineering.* 2024. Vol. 31. P. 3801–3842. DOI: 10.1007/s11831-024-10102-w.
64. Zhao Y., Zhang M., Gao J. Research progress of constitutive models of frozen soils: a review // *Cold Regions Science and Technology.* 2023. Vol. 206. № 10. Article 103720. DOI: 10.1016/j.coldregions.2022.103720.
65. Puswewala U.G.A., Rajapakse R.K.N.D. Constitutive relations for frozen soils and ice and their numerical implementation: research report,

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

Winnipeg, Manitoba: Department of Civil Engineering, University of Manitoba, 1987.

66. Andersland O.B., Ladanyi B. Frozen Ground Engineering (2nd edition). John Wiley & Sons, Inc., 2004. 364 p.
67. Lai Y.M., Xu X.T., Dong Y.H., Li S.Y. Present situation and prospect of mechanical research on frozen soils in China // Cold Regions Science and Technology. 2013. Vol. 87. P. 6–18.
68. Вялов С.С. Длительная прочность мерзлых грунтов и допускаемые на них давления // Труды Игарской научно-исследовательской мерзлотной станции. 1954. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
69. Вялов С.С. Реологические процессы в мерзлых грунтах и условие их предельного равновесия // Материалы по лабораторным исследованиям грунтов. Сб. 3. Нормативные указания. Изд-во АН СССР, Институт мерзлотоведения им. В.А. Обручева, 1957. С. 234–254.
70. Вялов С.С. Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 191 с.
71. Вялов С.С., Пекарская Н.К., Шушерина Е.Л. Методика испытаний мерзлых грунтов на сжатие и сдвиг с учетом ползучести // Мерзлотные исследования. М.: Изд-во МГУ, 1961. Т. 2.
72. Вялов С.С., Гмошинский В.Г., Городецкий С.Э., Григорьева В.Г., Зарецкий Ю.К., Пекарская Н.К., Шушерина Е.П. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 254 с.
73. Вялов С.С., Городецкий С.Э., Ермаков В.Ф. и др. Методика определения характеристик ползучести, длительной прочности и сжимаемости мерзлых грунтов. М.: Наука, 1966. 131 с.
74. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
75. Зарецкий Ю.К. О реологических свойствах пластичномерзлых грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1972. № 2.
76. Зарецкий Ю.К., Фиш А.М. Исследование реологических свойств льда с помощью прессиометра // Труды ААНИИ. 1974. Т. 324. С. 156–162.
77. Зарецкий Ю.К., Чумичев Б.Д. Кратковременная ползучесть льда. Новосибирск: Наука, 1982. 119 с.
78. Зарецкий Ю.К., Чумичев Б.Д., Щеболева А.Г. Вязкопластичность льда и мерзлых грунтов. Новосибирск: Наука, 1986. 185 с.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

79. Зарецкий Ю.К., Фиш А.М. Влияние температуры на прочность и вязкость льда // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1996. № 2. С. 9–13.
80. Роман Л.Т. Физико-механические свойства мерзлых торфяных грунтов. Новосибирск: Наука, 1981. 136 с.
81. Цытович Н.А., Сумгин М.И. Основания механики мерзлых грунтов. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1937. 432 с.
82. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов. М.: Высшая школа, 1973. 446 с.
83. Andersland O.B., Anderson D.M. Geotechnical Engineering for Cold Regions. New York: McGraw-Hill Book Company, 1978. 551 с.
84. Ladanyi B. An engineering theory of creep of frozen soils // Canadian Geotech. J. 1972. Vol. 9. № 1. P. 63–80.
85. Ladanyi B. Mechanical behaviour of frozen soils // Proceedings of the International Symposium on Mechanical Behaviour of Structured Media, Carleton University, Ottawa, May 18–21, 1981. New York: Elsevier, 1981. P. 205–245.
86. Ladanyi B. Mechanical properties data base for ground freezing applications // Proceedings of the International Symposium on Ground Freezing and Frost Action in Soils, Lulea, Sweden, 1997. The Netherlands: A.A. Balkema, 1997. P. 43–52.
87. Morgenstern N. Geotechnical engineering and frontier resource development // Geotechnique. 1981. Vol. 31. P. 305–365.
88. Parameswaran V.R. Extended failure time in the creep of frozen soil // Mechanics of Materials. 1987. Vol. 6. P. 233–243.
89. Phukan A. Frozen Ground Engineering. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985. 336 p.
90. Phukan A. Frost in Geotechnical Engineering. Rotterdam, The Netherlands: A.A. Balkema, 1993. 200 p.
91. Роман Л.Т. Модель ползучести и прочности мерзлых грунтов // Збірник наукових праць (галузеve машинобудування, будівництво). Матеріали Всеукраїнського с міжнародним участием научно-практического семинара «Современные проблемы геотехники». Полтава: ПолтНТУ, 2012. Т. 4. № 34. С. 229–238.
92. Puswewala U.G.A., Rajapakse R.K.N.D. Computational analysis of creep in ice and frozen soil based on Fish's unified model // Canadian Journal of Civil Engineering. 1993. Vol. 20. № 1. P. 120–132. DOI:10.1139/193-013.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

93. Selvadurai A.P.S., Hu J. Axial loading of foundations embedded in frozen soils // *Int. J. Offshore and Polar Engineering*. 1995. Vol. 6. P. 96–103.
94. Li D., Chen J., Zhou Y. A study of coupled creep damaged constitutive model of artificial frozen soil // *Advances in Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 2018. № 5. P. 1–9. DOI:10.1155/2018/7458696.
95. Li S., Lai Y., Zhang S., Liu D. An improved statistical damage constitutive model for warm frozen clay based on Mohr-Coulomb criterion // *Cold Regions Science and Technology*. 2009. Vol. 57. P. 154–159.
96. Selvadurai A.P.S., Seppehr K. Discrete element modelling of pipe uplift in frozen ground regimes // *Proceedings of the International Symposium on Ground Freezing and Frost Action in Soils, Lulea, Sweden, 1997*. The Netherlands: A.A. Balkema, 1997. P. 345–358.
97. Shi S., Zhang F., Feng D., Tang K. Creep constitutive model for frozen soils based on hardening and damage effects // *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2020. Vol. 24. P. 1146–1158.
98. Zhu Z., Ning J., Ma W. A constitutive model of frozen soil with damage and numerical simulation for the coupled problem // *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2010. Vol. 53. № 4. P. 699–711.
99. Mróz Z., Norris V.A. Elastoplastic and viscoplastic constitutive models for soils with application to cyclic loading // *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads* (ed. by G.N. Pande, O.C. Zienkiewicz). Chichester – New York: John Wiley & Sons, 1982. P. 173–217.
100. Mróz Z. Elastoplastic and viscoplastic constitutive models for granular materials // *Mechanics of Granular Materials: An Introduction* (ed. by B. Cambou). Vienna: Springer, 1998. P. 325–378. DOI: 10.1007/978-3-7091-2526-7_6.
101. Perzyna P. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials // *Q. Appl. Math.* 1963. Vol. 20. P. 321–332.
102. Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity // *Recent Advances in Applied Mechanics* (ed. by C.-S. Yih). New York: Academic Press, 1966. P. 243–277.
103. Hashiguchi K., Tsutsumi S. Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect // *Int. J. Plast.* 2003. Vol. 19. P. 1651–1677.
104. Lade P.V., Duncan J.M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil // *J. Geotech. Eng. Div. ASCE*, 1978. Vol. 104. № 1. P. 139–141.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

105. Lade P.V., Jessberge H.L., Diekmann N. Stress-strain and volumetric behavior of frozen soils // Proceedings of the 2nd International Symposium on Ground Freezing, Trondheim, Norway, 1980. P. 48–64.
106. Li. N, Chen B., Chen F.X., Xu X.Z. The coupled heat-moisture-mechanic model of the frozen soil // Cold Regions Science & Technology. 2000. Vol. 31. № 3. P. 199–205.
107. Mortara G. A constitutive framework for the elastoplastic modelling of geomaterials // Int. J. Solids Struct. 2015. Vol. 63. P. 139–152.
108. Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P. On the yielding of soils // Geotechnique. 1958. Vol. 8. P. 22–53.
109. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay // Engineering Plasticity (ed. by J. Heyman, F.P. Leckie). Cambridge: Cambridge University Press, 1968. P. 535–609.
110. Roscoe K.H., Schofield A.N., Thurairajah A. Yielding of clays in states wetter than critical // Geotechnique. 1963. Vol. 13. № 3. P. 211–240.
111. Shen W.Q., Shao J.F., Kondo D., Gatmiri B. A micro-macro model for clayey rocks with a plastic compressible porous matrix // Int. J. Plast. 2012. Vol. 36. P. 64–85.
112. Steinhäuser M.O., Grass K., Strassburger E., Blumen A. Impact failure of granular materials – non-equilibrium multiscale simulations and high-speed experiments // Int. J. Plast. 2009. Vol. 25. P. 161–182.
113. Vorobiev O. Generic strength model for dry jointed rock masses // Int. J. Plast. 2008. Vol. 24. № 12. P. 2221–2247.
114. Xie S.Y., Shao J.F. Experimental investigation and poroplastic modeling of saturated porous geomaterials // Int. J. Plast. 2012. Vol. 39. № 2. P. 27–45. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.05.007.
115. Yao Y.P., Wang N.D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models // J. Eng. Mech. 2014. Vol. 140. № 3. P. 614–629.
116. Altenbach H., Stoychev G.B., Tushtev K.N. On elastoplastic deformation of grey cast iron // Int. J. Plast. 2001. Vol. 17. № 5. P. 719–736. DOI: 10.1016/S0749-6419(00)00026-7.
117. Вялов С.С., Зарецкий Ю.К., Городецкий С.Э. Расчеты на прочность и ползучесть при искусственном замораживании грунтов. Л.: Стройиздат, 1981. 200 с.
118. Разбегин В.Н. Вязкопластичность льда и некоторых типов грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1995. № 6. С. 2–8.
119. Дубина М.М., Агейкин В.Н. Методы решения задач тепломассообмена в криолитозоне. СПб.: Недра, 2003. 246 с.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

120. Zhou H.W., Wang C.P., Han B.B., Duan Z.Q. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2011. Vol. 48. № 1. P. 116–121. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2010.11.004.
121. Zhou H., Liu D., Lei G., Xue D., Zhao Y. The creep-damage model of salt rock based on fractional derivative // *Energies*. 2018. Vol. 11. Article 2349. DOI:10.20944/preprints201807.0584.v1.
122. Cai C., Ma W., Zhao S., Zhou Z.W., Mu Y.-H. Uniaxial tests on frozen loess and its constitutive model // *Chinese Journal of Geotechnical Engineerin*. 2017. Vol. 39. № 5. P. 880–887.
123. Cai C., Ma W., Zhou Z., Mu Y., Zhao S., Chen D., Liao M. Laboratory investigation on strengthening behavior of frozen China standard sand // *Acta Geotechnica*. 2019. Vol. 14. P. 179–192. URL: <https://doi.org/10.1007/s11440-018-0648-3>.
124. Вялов С.С., Зарецкий Ю.К., Максимяк Р.В. Кинетика структурных деформаций и разрушения глин // *Труды 8-го Международного конгресса по механике грунтов и фундаментостроению*. М.: Стройиздат, 1973. С. 13–24.
125. Вялов С.С., Пекарская Н.К., Максимяк Р.В. О физической сущности процессов деформирования и разрушения глинистых грунтов // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 1970. № 1. С. 7–9.
126. Sayles F.H. Creep of frozen sands: technical report № 190. Hanover, NH: U.S. Arm, Corps of Engineers, Cold Regions Research and Engineering Laboratory, 1968. 54 p.
127. Klein J., Jessberger H.L. Creep stress analysis of frozen soils under multiaxial stress of stress // *Engineering Geology*. 1979. Vol. 13. P. 353–365.
128. Domaschuk L., Shieldes D.H., Rahman M.G. A model for attenuating creep of frozen sand // *Cold Regions and Technology*. 1991. Vol. 19. № 2. P. 145–161.
129. He F., Wang X., Jiang D., Zhou Y., Li J., Chen H., Chen M. Creep characteristics of frozen sand-concrete interface based on ice content // *Journal of Southwest Jiaotong University*. 2024. Vol. 59. № 2. P. 361–368. DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.20220552.
130. Andersland O.B., Akili W. Stress effect on creep rates of a frozen clay soil // *Geotechnique*. 1967. Vol. 17. № 1. P. 27–39.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

131. He P., Cheng G.D., Zhu Y.L. Constitutive theories on viscoelastoplasticity and damage of frozen soil // *Science in China (Series D)*. 1999. Vol. 42. P. 38–43.
132. Miao T.D., Wei X.X., Zhang C.Q. Creep of frozen soil by damage mechanics // *Science in China (Series B)*. 1995. Vol. 25. № 3. P. 309–317.
133. Miao T.D., Wei X.X., Zhang C.Q. Creep of frozen soil by damage mechanics // *Science in China (Series B)*. 1995. Vol. 38. № 8. P. 996–1002.
134. Miao T.D., Wei X.X., Zhang C.Q. Microstructural damage theories of creep of frozen soil // *Science in China (Series B)*. 1995. Vol. 25. № 3. P. 309–317.
135. Assur A. Some promising trends in ice mechanics // *Proceedings of the IUTAM Symposium “Physics and Mechanics of Ice”*, Copenhagen, Denmark, August 6–10, 1979 (ed. by P. Tryde). Berlin: Springer-Verlag, 1980. P. 1–15.
136. Li D.W., Wang R.H., Hu P. Study of frozen soil creep damage-coupling constitutive function // *Journal of Glaciology and Geocryology*. Vol. 29. № 3. P. 446–449 (in Chinese).
137. Li D.W., Wang R.H., Zhao Y.H., Hu P. Research on parabolic yield-surface creep constitutive model of artificial frozen soil // *Rock and Soil Mechanics*. 2007. Vol. 28. № 9. P. 1943–1948 (in Chinese).
138. Ting J.M. Tertiary creep model for frozen sands // *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 1983. Vol. 109. № 7. P. 932–945.
139. Ting J.M., Martin R.T., Ladd C.C. Mechanisms of strength for frozen sand // *Journal of Geotechnical Engineering*. 1983. Vol. 109. № 10. P. 1286–1302.
140. Ting J.W. The Creep of Frozen Sands: Qualitative and Quantitative Models: Final Report, Part 2. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, 1981. 441 p.
141. Yin J.H., Graham J. Viscous elastic plastic modeling of one-dimensional time dependent behavior of clays // *Can. Geotech. J.* 1989. Vol. 26. P. 199–209.
142. Zhu Y.L., Carbee D.L. Creep behavior of frozen silt under constant uniaxial stress // *Proceedings of the 4th International Conference on Permafrost*, Fairbanks, Alaska, 1984. P. 1507–1512.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

143. Arenson L., Springman S. Mathematical descriptions for the behaviour of ice-rich frozen soils at temperature close to 0 °C // Canadian Geotechnical Journal. 2005. Vol. 42. № 2. P. 431–442.
144. McRoberts E.C., Law T.C., Murray T.K. Creep tests on undisturbed ice-rich silt // Proceedings of the 3rd International Conference on Permafrost. Edmonton, Alberta, Canada: National Research Council of Canada, 1978. Vol. 1. P. 539–545.
145. Yao X., Qi J., Zhang J., Yu F. A one-dimensional creep model for frozen soils taking temperature as an independent variable // Soils and Foundations. 2018. Vol. 58. № 3. P. 627–640.
146. Yao X., Qi J., Qiao X., Liu M. An isotache model for frozen soil taking account the effect of creep on plastic yield pressure // KSCE Journal of Civil Engineering. 2017. Vol. 22. № 2. P. 555–564. DOI:10.1007/s12205-017-1095-7.
147. Zhu Y., Carbee D.L. Strain rate effect on the tensile strength of frozen silt // Proceedings of the 4th International Symposium on Ground Freezing. Sapporo, Japan, 1985. P. 153–157.
148. Zhu Y.L., Liu Y.Z., Xie X.D. Experimental Studies of in situ creep properties of ground ice in Qinghai-Tibetan Plateau // Proceeding of the 1st Symposium on Glaciology and Cryopedology, Geographical Society of China, 1983. Beijing: Science Press, 1983. P. 124–130 (in Chinese).
149. Shao Y., Suo Y., Xiao J., Bai Y., Yang T. Creep characteristic test and creep model of frozen soil // Sustainability. 2023. Vol. 15. № 5. Article 3984. DOI: 10.3390/su15053984.
150. Odqvist F.K.G., Hult J. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Berlin: Springer-Verlag, 1962. 308 s.
151. Sayles F.H. Triaxial constant strain rate tests and triaxial creep tests on frozen Ottawa sand // Proceedings of the 2nd International Permafrost Conference, Yakutsk, USSR. Washington, D.C.: National Academy of Sciences, 1973. P. 384–391.
152. Sayles F.H., Haines D. Creep of frozen silts and clay: technical report № 252. Hanover, NH: Cold Regions Research and Engineering Laboratory, 1974.
153. Zhu Y., Zhang J., Peng W., Sheng Z., Miao L. Constitutive relations of frozen soil in uniaxial compression // Journal of Glaciology and Geocryology. 1992. Vol. 14. № 3. P. 210–217.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

154. Wu Z.W., Zhang J.Y., Zhu Y.L. Experimental study on rheological properties of frozen soil // Proceedings of the 1st Chinese Conference on Glaciology and Geocryology. Beijing: Science Press, 1982. P. 128–132 (in Chinese).
155. Wu Z.W., Zhang J.Y., Zhu Y.L. Strength and failure characteristics of frozen soil // Proceedings of the 2nd Chinese Conference on Glaciology and Geocryology. Lanzhou: Gansu People's Publishing House, 1983. P. 275–280 (in Chinese).
156. Wu Z.W., Zhang J.Y., Zhu Y.L. Experimental research on determination of the long-term strength of frozen soils // Professional papers on permafrost studies of Qinghai-Tibetan Plateau. Beijing: Science Press, 1983. P. 120–123 (in Chinese).
157. Fish A.M. Deformation and failure of frozen soils and ice at constant and steadily increasing stresses // Proceedings of the 4th Canadian Permafrost Conference, Calgary, Canada, March 2–6, 1981 (ed. by H.M. French). Ottawa: National Research Council of Canada, 1982. P. 419–428.
158. Fish A.M. Comparative analysis of the USSR construction codes and the US Army technical manual for design of foundations on permafrost: report № 82-14. US Army, Cold Regions Research and Engineering Laboratory, 1982. 20 p.
159. Ma W., Wu Z.W., Sheng Y. Strength and creep of frozen soil // Journal of Glaciology and Geocryology. 1994. Vol. 16. № 2. P. 113–118 (in Chinese).
160. Городецкий С.Е. Ползучесть и прочность мерзлых грунтов при сложном напряженном состоянии // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1975. № 3. С. 39–42.
161. Qi J., Wang S., Yu F. A review on creep of frozen soils // Proceedings of the 2nd International Symposium on Constitutive Modeling of Geomaterials (IS-Model 2012) “Constitutive Modeling of Geomaterials: Advances and New Applications”, Beijing, China, October 15–16, 2012. Berlin: Springer-Verlag, 2013. P. 129–133.
162. Ning J., Zhu Z. Constitutive model of frozen soil with damage and numerical simulation of the coupled problem // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2007. Vol. 39. № 1. P. 70–76.
163. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

164. Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н. О применении дробного исчисления Римана – Лиувилля для описания распределений вероятностей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. № 18. 21 с.
165. Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z., Chen J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // *Mathematical Problems in Engineering. Special Issue: Theory and Applications of Fractional Order Systems*. 2016. Article 9183296. DOI: 10.1155/2016/9183296.
166. Chen L., Chen S.G., Zhang H., Yang J.S. A nonlinear viscoelasto-plastic creep model based on fractional calculus // *Journal of Sichuan University*. 2013. Vol. 45. № 3. P. 7–11.
167. Yin D., Zhang W., Cheng C., Li Y. Fractional time-dependent Bingham model for muddy clay // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2012. Vol. 187. P. 32–35.
168. Zhou M.M., Meschke G. A three-phase thermo-hydro-mechanical finite element model for freezing soils // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2013. Vol. 37. P. 3173–3193.
169. Zhou H.W., Wang C.P., Han B.B., Duan Z.Q. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2011. Vol. 48. № 1. P. 116–121.
170. Enelund M., Mahler L., Runesson K., Josefson B.L. Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws // *International Journal of Solids and Structures*. 1999. Vol. 36. № 16. P. 2417–2442.
171. Smit W., de Vries H. Rheological models containing fractional derivatives // *Rheologica Acta*. 1970. Vol. 9. № 4. P. 525–534.
172. Li Xi., Li Xu., Liu J. A dynamic soil freezing characteristic curve model for frozen soil // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2024. Vol. 16. № 8. P. 3339–3352. DOI: 10.1016/j.jrmge.2023.09.008.
173. Wang Z., Teng J., Zhou Y., Zhang S. Comparative analysis of nine categories of soil freezing characteristic curve models for simulating frost heave // *Cold Regions Science and Technology*. 2025. Vol. 36. Article 104498.
174. Whitcomb J., Chen R., Clewley D., Yi Y., Kimball J., Moghaddam M. Maps of active layer thickness on the north slope of Alaska by upscaling P-band polarimetric SAR retrievals // *Proceedings of the 41st IEEE*

ПРЕПРИНТ НАУЧНОЙ СТАТЬИ

- International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2021), Brussels, Belgium, July 11–16, 2021. Piscataway, NJ: IEEE, 2021. P. 15–20.2021. DOI: 10.1109/IGARSS47720.2021.9553628.
175. Chen J., Lin X., Wu T., Hao J., Wu X., Zou D., Zhu X., Hu G., Qiao Y., Wang D., Yang S., Zhang L. Predicting seasonal deformation using InSAR and machine learning in the permafrost regions of the Yangtze River Source Region // *Water Resources Research*. 2024. Vol. 60. № 9. Article e2023WR036700. URL: <https://doi.org/10.1029/2023WR036700>.
176. Fan P., Lin H., Zhang Z., Deng H. Enhanced detection of permafrost deformation with machine learning and interferometric SAR along the Qinghai-Tibet engineering corridor // *Remote Sensing*. 2025. Vol. 17. № 13. Article 2231. URL: <https://doi.org/10.3390/rs17132231>.
177. Ahajjam A., Soaper M., Chance R., Chandler J., Pasch T. Predicting freeze-thaw states in Alaska permafrost landscapes using climate reanalysis and machine learning // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. Elsevier, 2025. Vol. 140. Article 104576.
178. Sun Y., Zhou S., Meng S., Wang M., Mu H. Principal component analysis – artificial neural network-based model for predicting the static strength of seasonally frozen soils // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13. Article 16085. DOI: 10.1038/s41598-023-43462-7.
179. Zheng J., Wang J., Lu Y., Gu X., Pastor M., Moussavi Tayyebi S., Mu Y., Wang T. Modelling the frost cracking behavior in clayey soils: a peridynamic approach // *Computers and Geotechnics*. 2024. Vol. 176. Article 106765. DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106765.